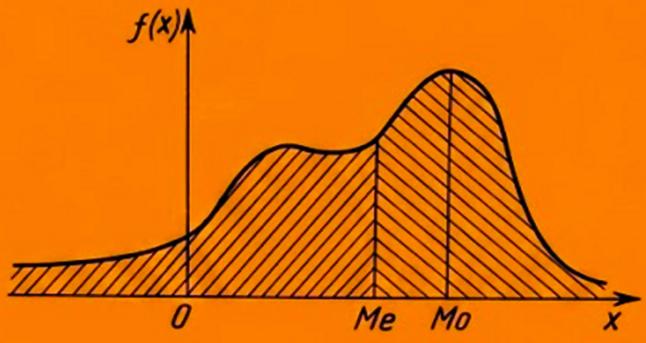
Р. М. ЖЕВНЯК
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Часть 1

Р. М. ЖЕВНЯК,
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ч. I

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1984

ББК 22.11я73
Ж 45
УДК 51(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института и *М. В. Федорюк*, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Московского физико-технического института

Жевняк Р. М., Карпук А. А.

Ж 45 Высшая математика. Ч. I. [Учеб. пособие для втузов].—Мн.: Выш. шк., 1984.— 223 с., ил.

В пер.: 70 к.

В пособии содержатся основы линейной алгебры и аналитической геометрии, а также теория дифференциального исчисления.

Предназначается для студентов технических втузов.

Ж $\frac{1702010000-191}{M304(05)-84}$ 15—84

ББК 22.11я73

© Издательство «Вышэйшая школа», 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Основные обозначения 4

I. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры . 5

1.1. Элементы теории множеств и математической логики 5
1.2. Отображения множеств и функции 10
1.3. Векторы и линейные операции над ними 12
1.4. Скалярное произведение векторов 20
1.5. Прямая и плоскость в пространстве 23
1.6. Линейные пространства 33
1.7. Евклидовы пространства 42
1.8. Матрицы и действия над ними 52
1.9. Линейные операторы и их матрицы 58
1.10. Линейные операторы в евклидовом пространстве 66
1.11. Определители и их свойства 72
1.12. Обратная матрица 81
1.13. Векторное и смешанное произведения векторов 83
1.14. Ранг матрицы 87
1.15. Системы линейных уравнений 94
1.16. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов 106
1.17 Переход к новому базису 111
1.18. Канонический вид матрицы линейного оператора 114
1.19. Квадратичные формы 116
1.20. Кривые второго порядка 121
1.21. Поверхности второго порядка 129

2. Введение в математический анализ

2.1. Действительные числа 138
2.2. Числовая последовательность и ее предел 142
2.3. Предел функции в точке 153
2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции 159
2.5. Непрерывность функции в точке 162
2.6. Сравнение функций 169
2.7. Непрерывность функции на отрезке 173

3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

3.1. Производная функции 180
3.2. Дифференциал функции 188
3.3. Производные и дифференциалы высших порядков 191
3.4. Основные теоремы дифференциального исчисления 196
3.5. Правило Лопиталя 200
3.6. Формула Тейлора 203
3.7. Исследование функций с помощью производных 209

Ответы 219

Литература 222

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу предлагаемого учебного пособия положен курс лекций, который на протяжении более десяти лет читался авторами студентам Минского радиотехнического института. Данное пособие полностью соответствует новой программе по высшей математике для втузов, утвержденной в 1979 г.

Первая часть книги включает три раздела: основы линейной алгебры и аналитической геометрии, введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, т. е. материал, излагаемый студентам втузов в первом семестре.

Основной текст пособия снабжен большим количеством примеров, поясняющих суть теоретических положений. В конце каждого параграфа приводятся задачи и упражнения для самостоятельного решения, дополняющие теоретическую часть пособия и доступные студентам, усвоившим предлагаемый курс.

Новой программой по высшей математике предусмотрены типовые расчеты. При подборе задач для данного пособия авторы учли опыт разработки этих расчетов в Московском энергетическом институте и в Минском радиотехническом институте.

Предлагаемое пособие соответствует вышедшим в издательстве «Наука» сборникам задач по высшей математике для втузов.

В процессе работы над книгой ряд ценных советов дали доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Богданов, доцент В. В. Амелькин (Белорусский государственный университет). Всем им авторы выражают глубокую признательность.

При работе над рукописью неоценимую помощь оказал заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института, доктор физико-математических наук, профессор Л. Д. Кудрявцев, полностью прочитавший рукопись и сделавший ценные замечания, существенно улучшившие пособие, за что авторы выражают ему искреннюю благодарность.

Авторы считают также своим приятным долгом выразить глубокую благодарность рецензентам: доктору физико-математических наук, профессору кафедры высшей математики Московского физико-технического института М. В. Федорюку, заведующему кафедрой высшей математики Московского энергетического института, доктору физико-математических наук, профессору С. И. Похожаеву и сотрудникам этой кафедры профессору М. Л. Краснову, доцентам А. И. Киселеву, Л. М. Павлоцкой, П. А. Шмелеву за внимательное рецензирование рукописи и полезные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Авторы с благодарностью примут все пожелания по содержанию книги, которые просят направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{A}$ — множество;
$a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — элементы множества;
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ — линейные операторы;
A, B — матрицы;
$\mathbf{V}$ — линейное пространство;
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — векторы (элементы) линейного пространства;
$\boldsymbol{a}^i$, $\mathbf{AB}$ — геометрические векторы;
M, N — геометрические точки;
$\in$ — знак принадлежности;
$\forall$ — квантор общности;
$\exists$ — квантор существования;
■ — конец доказательства

1. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Множества. Понятие множества является фундаментальным первичным понятием. Под *множеством* будем понимать совокупность элементов (объектов), характеризуемых некоторым общим признаком. Например, можно говорить о множестве студентов в группе, множестве букв в алфавите, множестве состояний системы и т.д.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}, \ldots$ означает, что множество A состоит из элементов $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$.

В элементарной математике известны, например, следующие числовые множества: $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел; $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел.

Понятие «принадлежность» также является первичным в математике. Если элемент a принадлежит множеству A, то будем писать $a \in A$. Запись $b \overline{\in} A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Другими словами, равенство $A = B$ означает, что из $x \in A$ следует, что $x \in B$, и наоборот.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A принадлежит и множеству B. Этот факт записывается в виде $A \subset B$ или $B \supset A$ (читается: «множество A содержится в множестве B» или «множество B содержит множество A»). Например, так как всякое натуральное число n является целым, то $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Поскольку всякое целое число z — рациональное, то $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Любое же рациональное число q — действительное, поэтому $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Таким образом, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

В теории множеств вводится понятие *пустого множества*, обозначаемого символом $\varnothing$. По определению, $\varnothing$ — множество, не содержащее элементов.

Обозначим через $\{x \mid x \in M,\ p(x)\}$ множество всех элементов $x \in M$, обладающих некоторым свойством $p(x)$.

Например, встречавшиеся в элементарной математике отрезок, интервал и полуинтервалы можно записать в следующем виде:

отрезок — $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$;

интервал — $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x < b\}$;

полуинтервалы — $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x < b\}$; $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x \leqslant b\}$.

Логические символы. Многие математические понятия удобно записывать в виде выражений, содержащих некоторые логические сим-

волы. Так, символ $\forall$, называемый *квантором общности*, используется вместо слов «для любого», «для всех», «каково бы ни было» и т.д., а символ $\exists$ — *квантор существования* — вместо слов «существует», «найдется», «имеется» и т.д.

Пример 1. Из курса средней школы известны понятия четной и нечетной функций. Функция f называется четной (нечетной), если для любого $x \in X \subset \mathbf{R}$ имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), где $X \subset \mathbf{R}$ — область определения функции, симметричная относительно начала координат. Используя квантор общности, определение четной (нечетной) функции можно записать так: $(\forall x \in X \subset \mathbf{R}) : f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

В этой формуле, как и во всех последующих, круглые скобки отделяют выражения, относящиеся к логическим символам. Двоеточие в них означает «имеет место».

Пример 2. Функция f, определенная на всей числовой прямой, называется периодической, если существует такое число $T > 0$ (период функции), что для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено равенство $f(x + T) = f(x)$. Используя кванторы, это определение можно записать следующим образом:

$$(\exists T > 0)\,(\forall x \in \mathbf{R}) : f(x + T) = f(x).$$

Кроме кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$ часто используются логические символы следования $\Rightarrow$ и равносильности $\Leftrightarrow$. Символ $\Rightarrow$ означает «следует», «вытекает» (одно утверждение следует из другого), а символ $\Leftrightarrow$ — равносильность утверждений, стоящих по разные от него стороны. Например, определение подмножества A множества B можно сформулировать так:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)),\ \forall x \in A.$$

Операции над множествами. *Пересечением множеств* A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B одновременно, т.е.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Например, если $A = \{\beta, \gamma, 0, 3, 5\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, \alpha, \gamma\}$, то $A \cap B = \{\gamma, 0, 3\}$. Так как пересечение $A \cap B$ состоит из элементов, общих для A и B, то $A \cap B = B \cap A$. Если $B \subset A$, то, очевидно, $A \cap B = B$.

Пересечением множеств A_i, где i принадлежит некоторому множеству индексов I, называется множество $\bigcap\limits_i A_i$, которое состоит из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из множеств A_i. Пересечение конечного числа множеств A_1, A_2, ..., A_n будем обозначать $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ или $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из двух данных множеств, т.е.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Например, если $A = \{0, 1, 2, 3, \alpha, x\}$ и $B = \{0, 3, 5, 6, \alpha\}$, то $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, \alpha, x\}$. Очевидно, что $A \cup B = B \cup A$.

Объединением множеств A_i, $i \in I$, называется множество $\bigcup\limits_i A_i$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_i. В частности, объединение конечного числа множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будем обозначать $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ или $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \overline{\in} B\}.$$

Например, если $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, y\}$ и $B = \{0, 2, 4, 6, x\}$, то $A \setminus B = \{1, 3, 5, y\}$. Пусть E — некоторое основное множество.

Дополнением множества $A \subset E$ называется множество A^c, состоящее из всех элементов $y \in E$, не принадлежащих A, т.е. $A^c = \{y \mid y \in E,\ y \overline{\in} A\} = E \setminus A$.

Таким образом, все те элементы, которые не принадлежат множеству A, образуют множество A^c. Следовательно, A и его дополнение A^c не имеют общих элементов, т.е. $A \cap A^c = \varnothing$.

Введенные операции над множествами удобно иллюстрировать геометрически, используя так называемые диаграммы Венна* — плоские модели рассматриваемых множеств. На рис. 1.1, *а — г* заштрихованные области изображают пересечение $A \cap B$, объединение $A \cup B$, разность $A \setminus B$ и дополнение A^c множеств A и B соответственно.

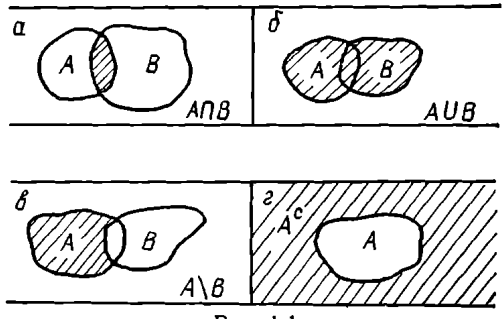


Рис. 1.1.

Пусть далее M и N — произвольные множества. Пару (x, y) элементов $x \in M$, $y \in N$, взятых в указанном порядке, будем называть *упорядоченной парой*, считая при этом, что $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Элементы x и y упорядоченной пары (x, y) называются *координатами* (компонентами) этой пары, причем x — первая координата, y — вторая координата.

Декартовым произведением двух множеств M и N называется множество $M \times N$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (x, y), т.е. $M \times N = \{(x, y) \mid \forall x \in M,\ \forall y \in N\}$. Например, если $M = \{0, 1, 2,\}$ и $N = \{2, 3\}$, то $M \times N = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$. Переставив местами множества M и N, получим $N \times M = \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$. Сравнивая $M \times N$ и $N \times M$, замечаем, что в общем случае $M \times N \neq N \times M$.

Декартовым произведением n множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется множество $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall x_1 \in M_1,\ \forall x_2 \in M_2, \ldots, \forall x_n \in M_n\}$, элементами которого служат упорядоченные

* Дж. Венн (1834 — 1923) — английский математик.

наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящие из n элементов и расположенные в том порядке, в каком заданы множества $M_1, M_2, \ldots, M_n$ в произведении $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Если $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, то декартово произведение $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ обозначается M^n. Декартовы произведения допускают геометрически наглядное истолкование.

Пример 3. Если $M = \{x \in R \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, а $N = \{y \in R \mid -2 \leqslant y \leqslant -1\}$, то декартовы произведения $M \times N$ и $N \times M$ есть прямоугольники, изображенные на рис. 1.2.

Пример 4. Если $M = \{x, y)\,(x^2+y^2 = 1\}$, а $N = \{z \in R \mid 1 \leqslant z \leqslant 2\}$, то $M \times N$ представляет собой боковую поверхность цилиндра (рис. 1.3)

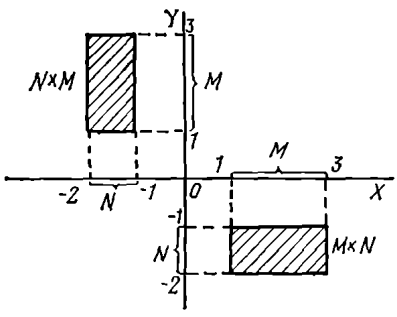


Рис. 1.2

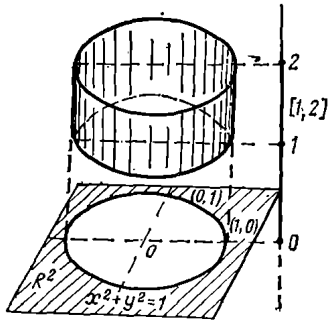


Рис. 1.3.

Логические высказывания. Будем называть высказыванием всякое повествовательное предложение, в отношении которого имеет смысл утверждать, истинно оно или ложно. Будем обозначать высказывания (утверждения) буквами A, B, C и т. д.

Если из истинности некоторого высказывания A вытекает справедливость другого высказывания B, то A называется достаточным условием для B, а B — необходимым условием для A. Этот факт записывается в виде $A \Rightarrow B$ (читается: «из A следует B»). Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то $A(B)$ называется необходимым и достаточным условием для B (для A), т.е. A и B в этом случае эквивалентны (равносильны). Эквивалентность A и B обозначается $A \Leftrightarrow B$. Например, при $a \neq 0$ необходимым и достаточным условием того, что $ax^2 + 2bx + c > 0$, $\forall x \in R$, будет $a > 0$, $b^2 - ac < 0$.

Предложение, противоположное некоторому утверждению A, называется *отрицанием* A и записывается символически в виде $\neg A$. Очевидно, что отрицание для «не A» есть A, т.е. $\neg(\neg A) = A$ (закон двойного отрицания).

Пусть для всех $x \in M$ имеет место некоторое свойство $\alpha(x)$. Кратко этот факт запишем в виде $\forall x \in M : \alpha(x)$.

Отрицанием этого утверждения является, очевидно, следующее утверждение: «найдется хотя бы один элемент $x^* \in M$, для которого $\alpha(x^*)$ несправедливо», т.е. имеет место $\neg\alpha(x^*)$. Таким образом, получаем соотношение.

$$\neg((\forall x \in M) : \alpha(x)) \Leftrightarrow ((\exists x^* \in M) : \neg\alpha(x^*)),$$

т.е. при отрицании выражения, начинающегося с квантора $\forall$, последний заменяется на квантор $\exists$, а само отрицание переносится на свойство $\alpha(x)$.

Аналогично доказывается соотношение

$$\neg((\exists x^* \in M) : \beta(x^*)) \Leftrightarrow ((\forall x \in M) : \neg\beta(x)),$$

т.е. при отрицании выражения, начинающегося с квантора $\exists$, последний заменяется на квантор $\forall$, а само отрицание переносится на свойство $\beta(x)$.

Теорема 1.1. Предложение $A \Rightarrow B$ справедливо тогда и только тогда, когда верно предложение $\neg B \Rightarrow \neg A$, т.е.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $A \Rightarrow B$. Предположим, что имеет место $\neg B$. Если бы в этом случае выполнялось A, то из условия $A \Rightarrow B$ следовало бы, что $\neg B \Rightarrow B$, что невозможно. Значит, должно быть $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Наоборот, если $\neg B \Rightarrow \neg A$, то по доказанному выше $\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B)$, т.е. $A \Rightarrow B$. ▣

Эта теорема используется в доказательствах по так называемому методу «от противного», когда прямое утверждение $A \Rightarrow B$ доказывается труднее, чем равносильное ему $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Метод математической индукции. Известно, какую важную роль играет в математике метод математической индукции. Напомним его суть.

Пусть $A(n)$ предложение, в формулировку которого входит натуральное число n. Если:

1) $A(n_0)$ истинно,

2) из истинности $A(n)$ следует истинность $A(n+1)$, т.е. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, то $A(n)$ истинно для всех $n \geqslant n_0$.

Мы примем этод метод как один из основных принципов, на котором строится математическое доказательство.

Методом математической индукции докажем одно важное неравенство.

Теорема 1.2. Для $h > -1$ справедливо неравенство

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.2}$$

Доказательство. Для $n = 0,1$ неравенство (1.2) справедливо. Допустим, что оно верно и при $n = k$, т.е. $(1+h)^k \geqslant 1 + kh$. Умножив обе части этого неравенства на $1 + h > 0$, получим $(1+h)^{k+1} \geqslant (1+kh)(1+h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geqslant 1 + (k+1)h$, поскольку $kh^2 \geqslant 0$.

Таким образом, неравенство (1.2) оказалось верным и при $n = k+1$, т.е. оно верно и для всех $n \in N$. ▣

Неравенство (1.2) называется *неравенством Бернулли**.

---

* Я. Бернулли (1654 — 1705) — швейцарский математик.

Задачи и упражнения

1. Пусть $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$; $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Доказать, что $A \setminus B = A \cap B^c$.

3. Доказать равенства:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$;

в) $(M^c)^c = M$, $(N \subset M) \Leftrightarrow (M^c \subset N^c)$;

г) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

4. Доказать равенства:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$;

г) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

д) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИИ

Понятие функции. Пусть имеется множество X, состоящее из элементов x, и множество Y, состоящее из элементов y. Термины «отображение», «функция» и «преобразование» употребляются в дальнейшем как синонимы. Если каждому элементу x из X по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $f(x)$ из Y, то говорят, что задана функция с областью определения X и областью значений, расположенной в Y, и пишут $f: X \to Y$, или $x \to f(x)$. В зависимости от контекста запись $f: X \to Y$ читается «f — функция на X со значениями в Y» или «отображение f из X в Y».

Например, функция $x \to \sin x$ осуществляет отображение из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, но $X = \mathbf{R}$, а $Y = [-1, 1] \subset \mathbf{R}$. Аналогично для функции $\log$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ область определения $X = (0, +\infty) \subset \mathbf{R}$, а область значений $Y = \mathbf{R}$.

Часто сама функция f обозначается символом $f(x)$. Обозначение функции $f: X \to Y$ и ее значения в точке $x \in X$ одним и тем же символом $f(x)$ обычно не приводит к недоразумению, так как в каждом конкретном случае всегда ясно, о чем идет речь.

Функция $f: X \to Y$ называется *постоянной* на X, если $f(x) = C$, $\forall x \in X$, где C — константа. Если $C = 0$, то функция f называется *нулевой*, т.е. $(f = 0) \Leftrightarrow (f(x) = 0, \ \forall x \in X)$.

Функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется *числовой* или *скалярной*.

Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то функция $F: X \to Z$, определенная равенством $F(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$, называется *композицией* (или *суперпозицией*) функций f и g или *сложной функцией* и обозначается $g \circ f$.

Таким образом, $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Образ и прообраз множества. *Образом множества* $A \subset X$ при отображении f называется множество $B = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\}$.

Если $B \subset Y$, то множество $A = \{x \mid x \in X,\ f(x) \in B\}$ называется *прообразом множества* B и обозначается $A = f^{-1}(B)$. Множество всех элементов $x \in X$, имеющих в качестве образа при отображении f один и тот же $y \in Y$, называется *прообразом* элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$. Если функция f обладает тем свойством, что для каждого $y \in Y$ множество $\{f^{-1}(y)\}$ состоит не более чем из одного элемента $x \in X$, то f называется *взаимно-однозначной* функцией. Таким образом, функция f взаимно-однозначна тогда и только тогда, когда

$$(f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2,\ \forall x_1,\ x_2 \in X). \tag{1.3}$$

Примером взаимно-однозначного отображения может служить функция $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x^2$, $x \in A = [-2, -1]$. Образом этого отрезка при отображении $x \to x^2$ является отрезок $B = [1, 4]$. Прообразом же отрезка B служит объединение двух отрезков: $A = [-2, -1]$ и $A_1 = [1, 2]$, т.е. $f^{-1}(B) = A \cup A_1$ (рис. 1.4)

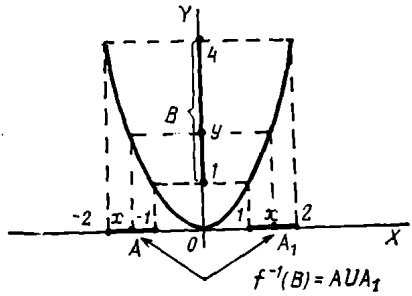


Рис. 1.4

Обратная функция. Если отображение $f: X \to Y$ взаимно-однозначно, то для $y = f(x) \in Y$ существует единственный прообраз $x = f^{-1}(y)$. Правило f^{-1}, которое для $y \in Y$ определяет единственный прообраз $f^{-1}(y) = x \in X$, называется *обратной функцией* или *обратным отображением* для f; само же отображение f при этом называется *обратимым*.

Таким образом,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x,\ \forall x \in X. \tag{1.4}$$

С другой стороны,

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = y,\ \forall y \in Y. \tag{1.5}$$

График функции. Каждой функции $f: X \to Y$ сопоставляется ее график — подмножество $G_f \subset X \times Y$ вида

$$G_f = \{(x,\ y) \mid x \in X,\ y = f(x)\} = \{(x,\ f(x)) \mid x \in X\}. \tag{1.6}$$

Из этого определения следует, что график функции $f: X \to Y$ составляют лишь такие упорядоченные пары $(x, f(x)) \in X \times Y$, у которых первая координата x принадлежит области определения X функции f, а вторая является значением функции $f(x)$, вычисленным при этом x.

Пример 2. Для функции $f(x) = x^2$, $x \in X = [-1, 2]$ множество $Y = [1, 4]$. На рис. 1.5 множество $X \times Y$ — заштрихованная область. График G_f этой функции состоит из точек (x, x^2) этой области.

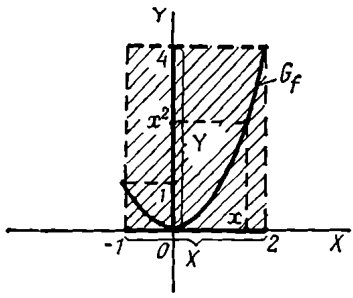


Рис. 1.5

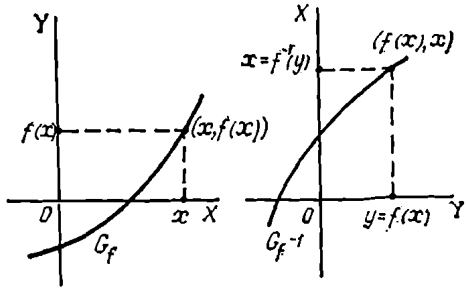


Рис. 1.6

Если f^{-1} — обратная функция для f, то ее графиком является множество

$$G_{f^{-1}} = \{(y,\ f^{-1}(y)) \mid y = f(x),\ x \in X\} = \{(f(x),\ x) \mid x \in X\} \subset Y \times X. \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.6) и (1.7) следует, что координаты точек графиков функций f и f^{-1} переставлены местами. Это означает, что для получения графика $G_{f^{-1}}$ в случае $X \subset R$, $Y \subset R$ нужно изменить наименование осей координат (X на Y, Y на X) и график G_f отобразить симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 1.6).

Задачи и упражнения

1. Для функции $y = \operatorname{tg} x$ найти образ множества $A = \left\{x \in R \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ и прообраз множества $B = \{y \in R \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

2. Для функции $y = x^2 - 4x - 9$, $x \leqslant 2$ найти обратную функцию. Вычислить образ множества $A = \{x \in R \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ и прообраз множества $B = \{y \in R \mid -4 \leqslant y \leqslant 3\}$.

1.3. ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Векторы в пространстве. В математике и ее приложениях различают два типа величин: скалярные и векторные. *Скалярной величиной* или *скаляром* называется величина, которая полностью определяется одним числом, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения, например, масса тела, температура, энергия, объем и т.д. Другие физические величины, такие, как скорость, ускорение, сила и т.д., представляют собой величины, задание которых получает смысл только тогда, когда, кроме их численных значений, указывается и их направление в пространстве. Такие величины называются *векторными*.

Мы будем рассматривать реальное физическое пространство, известное читателю из элементарной математики.

Вектором называется направленный отрезок AB с начальной точкой A и конечной точкой B. Мы будем рассматривать свободные

векторы, т.е. такие, которые можно перемещать параллельно самим себе. Будем считать, что два вектора $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$ равны, если они одинаково направлены и длины отрезков AB и CD равны: $|AB| = |CD|$. Таким образом, свободный вектор — это множество всех направленных отрезков, равных между собой в указанном смысле.

Вектор с началом A и концом B обозначается $\mathbf{AB}$. Часто вектор обозначается одной жирной буквой, например, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... , $\mathbf{x}$, ...

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю, ему можно приписать любое направление.

Длиной или *нормой* вектора $\boldsymbol{AB}$ называется длина отрезка AB. Длину вектора $\boldsymbol{AB}$ обозначают $|\boldsymbol{AB}|$ или $\|\boldsymbol{AB}\|$. Вектор $\mathbf{a}$, длина которого равна единице, называется *единичным* или *ортом*. Свободный вектор однозначно определяется своей длиной и направлением.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Коллинеарность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем обозначать $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны. Вектор, расположенный на прямой, параллельной данной прямой L (данной плоскости P), называется вектором, параллельным прямой L (плоскости P).

Линейные операции над векторами. Для свободных векторов определены операции сложения, вычитания и умножения их на действительные числа. Будем в дальнейшем рассматривать только свободные векторы, слово «свободный» можно опускать.

Суммой двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, который получается из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 1.7.). Сумма конечного числа n векторов $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, ... , $\mathbf{a}^n$, по определению, есть замыкающий вектор $\boldsymbol{OA}_n$ (рис. 1.8.).

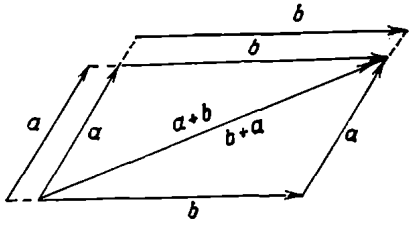


Рис. 1.7

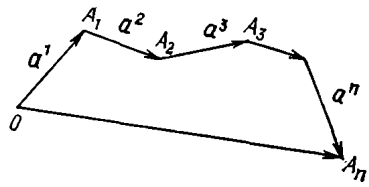


Рис. 1.8

Вектор $(-\mathbf{b})$ называется *противоположным* вектору $\mathbf{b}$, если $(-\mathbf{b}) \parallel \mathbf{b}$, $|-\mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$ и его направление противоположно направлению вектора $\mathbf{b}$.

Разностью двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, являющийся суммой векторов $\mathbf{a}$ и $(-\mathbf{b})$ (рис. 1.9). Отметим, что вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ направлен к концу вектора $\mathbf{a}$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ приведены к общему началу.

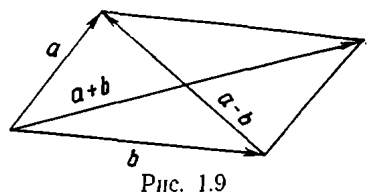


Рис. 1.9

Произведением вектора **a** *на действительное число* α называется вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, длина которого $|\mathbf{b}| = |\alpha\mathbf{a}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$, а направление совпадает с **a**, если $\alpha > 0$, и противоположно **a**, если $\alpha < 0$.

Если $\mathbf{a} \neq 0$, то единичный вектор $\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ называется ортом вектора **a**.

Введенные операции сложения векторов и умножение вектора на число называются *линейными*. Они обладают рядом свойств, известных из элементарной математики. Перечислим их.

1°. Сложение векторов коммутативно, т.е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \ \forall \mathbf{a}, \ \mathbf{b}.$$

2°. Сложение векторов ассоциативно, т.е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \ \forall \mathbf{a}, \ \mathbf{b}, \ \mathbf{c}.$$

3°. $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}, \ \forall \mathbf{a}$.

4°. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0, \ \forall \mathbf{a}$.

5°. Умножение вектора на число ассоциативно, т.е.

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}, \ \forall \mathbf{a}, \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbf{R}.$$

6°. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \ \forall \mathbf{a}$.

7°. Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т.е.

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \ \forall \mathbf{a}, \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbf{R}.$$

8°. Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т.е.

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \ \forall \mathbf{a}, \ \mathbf{b}, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Множество векторов пространства, удовлетворяющих свойствам 1° — 8°, называется *линейным* или *векторным пространством*, которое в дальнейшем будем обозначать $\mathbf{R}^3$.

Проекция вектора и ее свойства. Назовем *осью* прямую, на которой задано направление. *Углом между двумя векторами* (или между вектором и осью, или между двумя осями) называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть один вектор (ось), чтобы он совпал по направлению с другим вектором (осью) (рис 1.10). Очевидно, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Угол между векторами **a** и **b** обозначается $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$.

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ *на ось* L называется длина отрезка A_1B_1, заключенного между ортогональными проекциями начала и конца вектора **AB** на эту ось, взятая со знаком плюс, если направление от A_1 до B_1 совпадает с направлением оси L, и со знаком минус, если не совпадает.

Из определения и рис. 1.11 следует, что проекция $\mathrm{пр}_L\mathbf{a}$ вектора **a** на ось L равна произведению длины вектора **a** на косинус угла φ между вектором **a** и осью L, т.е.

$$\mathrm{пр}_L\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi. \qquad (1.8)$$

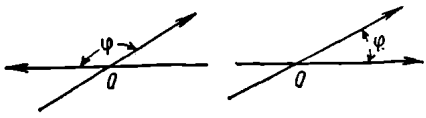


Рис. 1.10

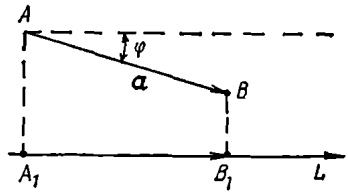


Рис. 1.11

Направленный отрезок $\mathbf{a}_L = \mathbf{A_1B_1}$ называется *ортогональной составляющей* вектора **AB** по оси L. Очевидно, ортогональная составляющая $\mathbf{a}_L = (\text{пр}_L \mathbf{a})\,\mathbf{l}^0$, где $\mathbf{l}^0$ — единичный вектор, соответствующий направлению оси L, или с учетом формулы (1.8)

$$\mathbf{a}_L = |\mathbf{a}| \cos\varphi \cdot \mathbf{l}^0. \tag{1.9}$$

Проекции векторов **a** и **b** на данную ось L обладают следующими свойствами:

$$1^\circ.\ \text{пр}_L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_L \mathbf{a} + \text{пр}_L \mathbf{b}. \tag{1.10}$$

$$2^\circ.\ \text{пр}_L(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\,\text{пр}_L \mathbf{a}. \tag{1.11}$$

Доказательство свойства 1° следует из рис. 1.12:

$$\text{пр}_L \mathbf{a} = |A_1B_1| = |A_1C_1| + |C_1B_1| = \\ = \text{пр}_L \mathbf{c} - \text{пр}_L \mathbf{b},$$

откуда и вытекает равенство (1.10). Для других возможных случаев расположения точек A_1, B_1, C_1 на оси L доказательство проводится аналогично.

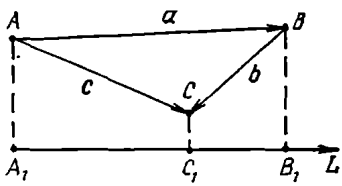


Рис. 1.12

Докажем теперь равенство (1.11). Обозначим через φ угол между вектором **a** и осью L. Тогда при $\alpha > 0$ имеем

$$\text{пр}_L(\alpha\mathbf{a}) = |\alpha\mathbf{a}| \cos\varphi = \alpha\,|\mathbf{a}| \cos\varphi = \alpha\ \text{пр}_L \mathbf{a},$$

а при $\alpha < 0$

$$\text{пр}_L(\alpha\mathbf{a}) = |\alpha\mathbf{a}| \cos\,(\pi - \varphi| = -\alpha\,|\mathbf{a}|\ \cos(\pi - \varphi) = \alpha\,|\,\mathbf{a}\,|\cos\varphi = \\ = \alpha\,\text{пр}_L \mathbf{a},$$

так как при $\alpha < 0$ вектор $\alpha\mathbf{a}$ направлен противоположно направлению **a**, т.е. в этом случае угол между вектором $\alpha\mathbf{a}$ и осью L равен $\pi - \varphi$.

При $\alpha = 0$ свойство 2° очевидно.

Линейная зависимость между векторами. Для характеристики взаимного расположения векторов в пространстве вводится понятие линейной зависимости между векторами.

Назовем *линейной комбинацией* n векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ вектор вида

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}^1 + \alpha_2 \mathbf{e}^2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}^n, \tag{1.12}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые действительные числа, называемые

коэффициентами линейной комбинации. Если вектор $\mathbf{x}$ представлен в виде линейной комбинации (1.12), то говорят, что он разложен по векторам $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$.

Векторы $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ называются *линейно-зависимыми*, если существуют такие постоянные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, что выполняется равенство

$$\lambda_1\mathbf{e}^1 + \lambda_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}^n = \mathbf{0}. \tag{1.13}$$

Если же равенство (1.13) выполняется только при всех $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то векторы $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ называются *линейно-независимыми*.

Если векторы $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ линейно-зависимы, то какой-то из этих векторов является линейной комбинацией остальных. В самом деле, линейная зависимость векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ означает выполнение равенства (1.13), в котором не все коэффициенты λ_i, $i = 1,2, \ldots, n$, равны нулю одновременно. Пусть этим коэффициентом является λ_n. Тогда из (1.13) получим

$$\mathbf{e}^n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\mathbf{e}^1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\mathbf{e}^2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\mathbf{e}^{n-1}.$$

Последнее соотношение означает, что вектор $\mathbf{e}^n$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^{n-1}$, т.е. линейно выражается через них.

Примером линейно-зависимых векторов могут быть любые два коллинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, так как в этом случае имеет место соотношение $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, где α — некоторое действительное число.

Из элементарной математики известно, что если $\mathbf{e}^1$ и $\mathbf{e}^2$ — два неколлинеарных вектора, то всякий компланарный им вектор $\mathbf{a}$ однозначным образом линейно выражается через векторы $\mathbf{e}^1$ и $\mathbf{e}^2$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}^1 + \alpha_2\mathbf{e}^2. \tag{1.14}$$

Отсюда следует, что *любые три компланарных вектора всегда линейно-зависимы.*

Аналогично, если $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ — *три некомпланарных вектора, то любой вектор* $\mathbf{a}$ *пространства единственным образом разлагается в их линейную комбинацию:*

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}^1 + \alpha_2\mathbf{e}^2 + \alpha_3\mathbf{e}^3. \tag{1.15}$$

Равенство (1.15) означает, что *любые четыре вектора в пространстве линейно-зависимы.*

Назовем теперь *базисом пространства* совокупность линейно-независимых векторов, по которым можно разложить любой вектор этого пространства. Тогда из вышеизложенного следует, что базис в трехмерном пространстве образует любая тройка некомпланарных векторов пространства, на плоскости — любая пара неколлинеарных векторов плоскости, а на прямой — любой ненулевой вектор этой прямой. Векторы, составляющие базис, называются *базисными*.

Таким образом, формула (1.14) представляет собой разложение

вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ на плоскости, а формула (1.15) — по базису $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ в пространстве, причем эти разложения единственны.

Коэффициенты α_1, α_2, α_3 в разложении (1.15) называются *координатами вектора* $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$. Аналогично интерпретируются коэффициенты α_1, α_2 в равенстве (1.14).

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами в заданном базисе сводятся к обычным линейным операциям над числами — координатами векторов. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3. При сложении двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ их координаты суммируются. При умножении вектора $\mathbf{a}$ на любое число α все его координаты умножаются на это число.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}^1 + \alpha_2\mathbf{e}^2 + \alpha_3\mathbf{e}^3$; $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}^1 + \beta_2\mathbf{e}^2 + \beta_3\mathbf{e}^3$. Тогда в силу свойств 1° — 8° линейных операций над векторами

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e}^1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e}^2 + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{e}^3,$$
$$\mu\mathbf{a} = (\mu\alpha_1)\mathbf{e}^1 + (\mu\alpha_2)\mathbf{e}^2 + (\mu\alpha_3)\mathbf{e}^3 \mu \in \mathbf{R}.$$

В силу единственности разложения по базису теорема доказана. ■

Декартова система координат. Введем в пространстве $\mathbf{R}^3$ прямоугольную декартову систему координат — совокупность трех взаимно перпендикулярных осей X, Y, Z, называемых *осями координат*, и точки O — *начало координат* (рис. 1.13). Единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направленные вдоль осей X, Y, Z соответственно, образуют прямоугольный базис. Известно, что каждый вектор $\mathbf{r}$ пространства можно единственным образом разложить по векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

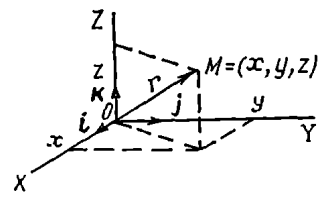


Рис. 1.13

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \qquad (1.16)$$

Числа x, y, z называются *координатами вектора* $\mathbf{r}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Этот факт будем записывать в виде $\mathbf{r} = (x, y, z)$, что равносильно разложению (1.16).

Геометрический смысл декартовых прямоугольных координат вектора выясняет следующее утверждение.

Теорема 1.4. Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ являются его проекциями на соответствующие оси координат.

Доказательство. Приложим вектор $\mathbf{a}$ к началу O системы координат и проведем через конец M этого вектора три плоскости, параллельные координатным плоскостям YZ, XZ, XY (рис. 1.14). Тогда вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ как диагональ параллелепипеда представится в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = (\mathrm{пр}_X\,\mathbf{a})\mathbf{i} + (\mathrm{пр}_Y\,\mathbf{a})\mathbf{j} + (\mathrm{пр}_Z\,\mathbf{a})\mathbf{k} =$$
$$= (|\mathbf{a}|\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (|\mathbf{a}|\cos\beta)\,\mathbf{j} + (|\mathbf{a}|\cos\gamma)\,\mathbf{k}, \qquad (1.17)$$

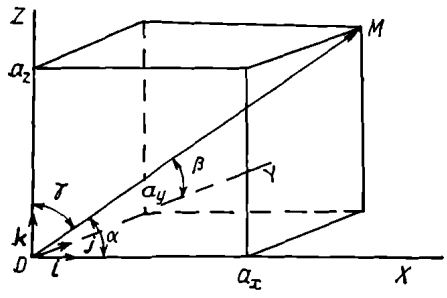


Рис. 1.14

в соответствии с равенством (1.9), где α, β, γ — углы, образованные вектором $\mathbf{a}$ с координатными осями X, Y, Z соответственно. Отсюда и из соотношения (1.16) в силу единственности разложения вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ получаем, что

$$x = \mathrm{пр}_X \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\alpha;\ y = \mathrm{пр}_Y \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\beta;$$
$$z = \mathrm{пр}_Z \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\gamma. \blacksquare \qquad (1.18)$$

По теореме Пифагора о диагонали параллелепипеда имеем

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a}_x|^2 + |\mathbf{a}_y|^2 + |\mathbf{a}_z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1.19)$$

Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\mathbf{a}$. Из формул (1.18) и (1.19) имеем

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\ \cos\beta &= \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

откуда

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (1.21)$$

Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ — единичный вектор, т. е. $|\mathbf{a}^0| = 1$, то из формул (1.20) имеем

$$\mathbf{a}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma), \qquad (1.22)$$

т. е. координатами единичного вектора служат его направляющие косинусы.

Согласно теореме 1.4, при выполнении линейных операций над векторами тем же операциям подвергаются и координаты этих векторов, т. е. если $\mathbf{a}^1 = (x_1, y_1, z_1)$; $\mathbf{a}^2 = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\mathbf{a}^1 \pm \mathbf{a}^2 = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2);$$
$$\alpha\mathbf{a}^1 = (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1).$$

Пример 1. Найти координаты орта вектора $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$.

Решение. Имеем $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$; $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

Пусть $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — коллинеарные векторы. Поскольку $(\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}) \Leftrightarrow ((\exists \alpha \in \mathbf{R})\colon \mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}) \Leftrightarrow (b_x, b_y, b_z) = \alpha(a_x, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$, то

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (1.23)$$

Замечание. Если одно или два из чисел в знаменателях соотношения (1.23) окажутся равными нулю, то такая запись становится символической, поскольку она не утверждает деления на нуль, а свидетельствует лишь о пропорциональности координат коллинеарных векторов.

Итак, коллинеарность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равносильна пропорциональности соответствующих координат этих векторов.

Радиус-вектор и координаты точки. *Радиус-вектором* $\mathbf{r}$ точки M называется вектор $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$, начало которого совпадает с началом системы координат (см. рис. 1.13). Очевидно, что всякая точка M в пространстве однозначно определяется своим радиус-вектором.

Координатами x, y, z точки M пространства называются проекции ее радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ на координатные оси, т. е. координатами точки являются коэффициенты разложения ее радиус-вектора по базису $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x,\ y,\ z). \qquad (1.24)$$

При этом координата x называется *абсциссой*, y — *ординатой*, z — *аппликатой* точки M и обозначается $M = (x,\ y,\ z)$.

Одинаковое обозначение координат вектора $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$ и точки $M = (x,\ y,\ z)$ не будет вносить путаницы, поскольку всегда будет ясно, о чем идет речь.

Рассмотрим две точки $A = (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B = (x_2,\ y_2\ z_2)$, радиус-векторы которых суть $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ (рис. 1.15). Так как $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, то приходим к следующему выводу: *чтобы найти координаты вектора* $\mathbf{AB}$, *нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.* Отсюда, в частности, получаем формулу для вычисления расстояния между рассматриваемыми точками A и B:

$$\rho(A,\ B) = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.25)$$

Деление отрезка в данном отношении. Говорят, что точка C делит внутренним образом отрезок AB в данном отношении λ, если $|AC| / |CB| = \lambda$. Найдем координаты x, y, z точки C, если $A = (x_1\ y_1,\ z_1)$ и $B = (x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Из рис. 1.16 следует, что

$$(\mathbf{AC} = \lambda\mathbf{CB}) \Leftrightarrow ((x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1) = \lambda(x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)).$$

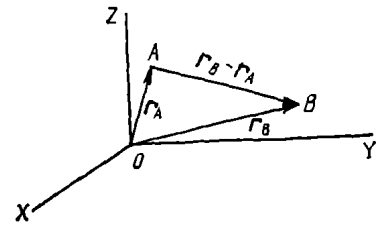


Рис. 1.15

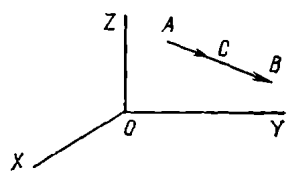


Рис. 1.16

Отсюда, приравняв координаты, получим

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y); \\ z - z_1 &= \lambda(z_2 - z) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{aligned}\right. \tag{1.26}$$

В частности, при $\lambda = 1$ из системы (1.26) находим координаты середины отрезка AB:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задачи и упражнения

1. Найти все числа α, при которых векторы $\mathbf{m} = (-1, 3)$ и $\mathbf{n} = (2, \alpha)$ линейно-зависимы.
2. Даны векторы $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$ и $\mathbf{b} = (-1, 4, -1)$. Найти координаты вектора $2\mathbf{a} - 3(\mathbf{b} + \mathbf{i}) + 2(\mathbf{a} - \mathbf{k})$.
3. Пусть $A = (2, -3, 0)$ и $B = (2, 5, -7)$. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $4 : 5$.
4. Даны радиус-векторы $\mathbf{r}^1$, $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{r}^3$ вершин треугольника. Найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.
5. Определить, при каких α и β векторы $\mathbf{a} = (-2, 3, \beta)$ и $\mathbf{b} = (\alpha, -6, 2)$ коллинеарны.

1.4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение векторов и его свойства. *Скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла $\varphi = (\widehat{a, b})$ между ними. Будем обозначать скалярное произведение символом $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi. \tag{1.27}$$

С физической точки зрения, скалярное произведение вектора силы F на вектор перемещения $\mathbf{s}$ численно равно работе этой силы:

$$A = (F, \mathbf{s}) = |F| \cdot |\mathbf{s}| \cos(\widehat{F, \mathbf{s}}).$$

Отметим свойства скалярного произведения.

1°. Скалярное произведение коммутативно:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}). \tag{1.28}$$

Это свойство очевидно.

2°. Скалярное произведение ассоциативно относительно скалярных множителей:

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{1.29}$$

В самом деле, имеем:
при $\lambda > 0$: $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = \lambda |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
при $\lambda < 0$: $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos (\pi - \varphi) = -|\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

3°. Скалярное произведение дистрибутивно относительно суммы векторов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}). \tag{1.30}$$

Действительно, из определения скалярного произведения следует, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}. \tag{1.31}$$

Тогда, учитывая линейные свойства проекций векторов, получаем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_{\mathbf{a}} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| (\operatorname{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} + \operatorname{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} + |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}),$$

и формула (1.30) доказана.

4°. Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой или когда эти векторы перпендикулярны, т. е. $((\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$). Справедливость свойства 4° очевидна.

Таким образом, условием ортогональности (перпендикулярности) двух ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения, т. е.

$$(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{1.32}$$

Скалярным квадратом вектора называется скалярное произведение вектора на себя: $\mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Очевидно, что $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Из равенств (1.27) и (1.31) получаем формулы для вычисления косинуса угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и величины проекции вектора $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{a}$:

$$\cos (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}; \tag{1.33}$$

$$\operatorname{пр}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|}. \tag{1.34}$$

Скалярное произведение в координатной форме. Координатные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеют длины, равные единице, т. е. $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$. Далее, так как эти векторы взаимно ортогональны, то $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0$. Отсюда и из равенств (1.28) — (1.30) для векторов $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{1.35}$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат (проекций) этих векторов.

В частности, положив в формуле (1.35) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, найдем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{1.36}$$

Отсюда следует (см. формулу (1.19)), что

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Используя координатную форму скалярного произведения, получаем, что условие ортогональности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет вид

$$(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) \Leftrightarrow (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0). \tag{1.37}$$

Кроме того, угол между векторами определяется из соотношения

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \tag{1.38}$$

а для определения проекции вектора $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{a}$ получаем формулу

$$\text{пр}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{1.39}$$

Вектор, ортогональный двум данным векторам. Решим задачу, играющую важную роль в приложениях векторной алгебры: найти вектор $\mathbf{n} = (x, y, z)$, ортогональный двум заданным неколлинеарным векторам $\mathbf{a}^1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mathbf{a}^2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Из условия ортогональности имеем

$$\left.\begin{matrix}(\mathbf{a}^1, \mathbf{n}) = 0;\\ (\mathbf{a}^2, \mathbf{n}) = 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}m_1 x + n_1 y + p_1 z = 0;\\ m_2 x + n_2 y + p_2 z = 0.\end{matrix}\right. \tag{1.40}$$

Таким образом, координаты x, y, z искомого вектора $\mathbf{n}$ удовлетворяют системе двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Если какой-то из коэффициентов в первом уравнении системы (1.40), например m_1, отличен от нуля, то, выразив из этого уравнения $x = -\frac{n_1}{m_1} y - \frac{p_1}{m_1} z$ и подставив его во второе уравнение, получим $(m_1 n_2 - m_2 n_1) y = (m_2 p_1 - m_1 p_2) z$. Отсюда, считая, что $m_1 n_2 - m_2 n_1 \neq 0$, имеем

$$y = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} z.$$

Тогда

$$x = \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1} z.$$

Таким образом,

$$\mathbf{n} = (x, y, z) = \left(\frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1} z, \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} z, z\right).$$

Придавая $z \in \mathbf{R}$ произвольные значения, получаем бесчисленное множество векторов $\mathbf{n}$, ортогональных $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$. Все они, очевидно, коллинеарны. В частности, положив $z = m_1 n_2 - m_2 n_1$, получим

$$\mathbf{n} = (x, y, z) = (n_1 p_2 - n_2 p_1,\ m_2 p_1 - m_1 p_2,\ m_1 n_2 - m_2 n_1). \tag{1.41}$$

Координаты x, y, z вектора $\mathbf{n}$ легко найти из следующих соображений. Обозначим число

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} \tag{1.42}$$

и назовем его *определителем второго порядка*.

Тогда координаты вектора $\mathbf{n}$, согласно формулам (1.41) и (1.42), равны:

$$x = \begin{vmatrix} n_1p_1 \\ n_2p_2 \end{vmatrix};\ y = -\begin{vmatrix} m_1p_1 \\ m_2p_2 \end{vmatrix};\ z = \begin{vmatrix} m_1n_1 \\ m_2n_2 \end{vmatrix}, \tag{1.43}$$

т. е.

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} n_1p_1 \\ n_2p_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m_1p_1 \\ m_2p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1n_1 \\ m_2n_2 \end{vmatrix}\right). \tag{1.44}$$

Сформулируем правило, по которому удобно вычислять координаты искомого вектора $\mathbf{n}$. Составляем таблицу $\begin{bmatrix} m_1n_1p_1 \\ m_2n_2p_2 \end{bmatrix}$, строками которой являются координаты векторов $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$ соответственно. Вычеркивая в ней поочередно столбцы, начиная с первого, и образуя из оставшихся столбцов определители второго порядка со знаками плюс при вычеркивании первого и третьего столбцов и минус — второго столбца, получаем числа, задаваемые формулами (1.43) и являющиеся координатами вектора $\mathbf{n}$. Например, пусть $\mathbf{a}^1 = (1, -1, 2)$ и $\mathbf{a}^2 = (3, 4, 1)$. Тогда из таблицы $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ получаем

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right) = (-9, 5, 7).$$

Нетрудно убедиться, что, действительно, $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}^1$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}^2$.

Отметим, что в § 1.13 будет указан другой способ отыскания вектора, ортогонального двум данным векторам.

Задачи и упражнения

1. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = (3, 1, 4)$ и $\mathbf{b} = (2, -1, 1)$.
2. Найти проекцию вектора $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$, если $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$.
3. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, а вектор $\mathbf{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. При $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 1$ найти: а) $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a})$; б) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$.
4. При каком α векторы $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$ ортогональны, если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$? Выяснить геометрический смысл этого условия.
5. Найти координаты вектора $\mathbf{n}$, ортогонального двум заданным коллинеарным векторам $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$. Выяснить геометрический смысл задачи.

1.5. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Канонические уравнения прямой. Прямая L в пространстве определяется однозначно, если известны точка, через которую она проходит, и ненулевой вектор, параллельный прямой, называемый *направляющим вектором* этой прямой, или если известны две точки этой прямой.

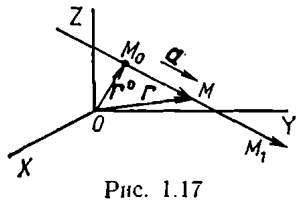


Рис. 1.17

Пусть заданы точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\mathbf{a} = (m, n, p)$. Составим уравнения прямой L, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\mathbf{a}$ (рис. 1.17).

Если $M = (x, y, z)$ — произвольная точка прямой L, то, очевидно, вектор $\boldsymbol{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$. Из условия коллинеарности векторов (1.23) получаем соотношения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{1.45}$$

которым удовлетворяют координаты любой точки $M \in L$.

Равенства (1.45) называются *каноническими уравнениями прямой L в пространстве.*

Уравнения прямой, проходящей через две точки. Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ (рис. 1.17). Очевидно, в этом случае направляющим вектором прямой L служит вектор $\mathbf{a} = \boldsymbol{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Тогда, используя уравнение (1.45), получаем искомые уравнения в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{1.46}$$

Например, в соответствии с замечанием к соотношению (1.23) уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+4}{-1}$ определяют прямую в пространстве, проходящую через точку $M_0 = (2, 1, -4)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$.

Параметрические уравнения прямой. Из рис. 1.17 следует, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 + \boldsymbol{M_0M}. \tag{1.47}$$

В силу коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{M_0M}$ существует число $t \in \mathbf{R}$, такое, что $\boldsymbol{M_0M} = t\mathbf{a}$. Тогда из уравнения (1.47) имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 + t\mathbf{a}, \ t \in \mathbf{R}. \tag{1.48}$$

Соотношение (1.48) называется *векторным параметрическим уравнением прямой в пространстве.*

В координатной форме уравнение (1.48) равносильно трем уравнениям:

$$x = x_0 + tm; \ y = y_0 + tn; \ z = z_0 + tp, \ t \in \mathbf{R}, \tag{1.49}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.

Исключая параметр t из уравнений (1.49), легко перейти к каноническим уравнениям (1.45).

Плоскость в пространстве. Как известно из курса средней школы, положение плоскости в пространстве однозначно определяется в следующих трех случаях: 1) даны точка, через которую проходит

плоскость, и вектор, ей перпендикулярный (нормальный); 2) даны два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, и точка, через которую эта плоскость проходит; 3) даны три точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Общее уравнение плоскости. Составим уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к ненулевому вектору $\mathbf{n} = (A, B, C)$, называемому *нормальным вектором* плоскости (рис. 1.18)

Пусть $M = (x, y, z)$ — произвольная точка плоскости P. Тогда вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}^0 = \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ плоскости P ортогонален вектору $\mathbf{n}$, т. е.

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}^0) = 0 \tag{1.50}$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.51}$$

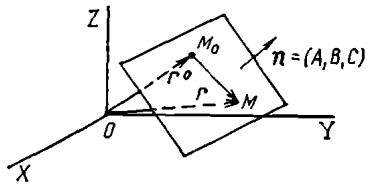


Рис. 1.18

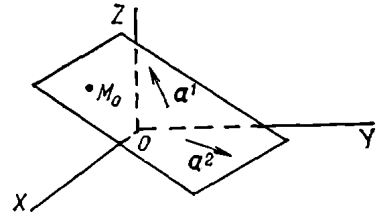


Рис. 1.19

Соотношению (1.51) удовлетворяют, очевидно, координаты тех и только тех точек пространства, которые принадлежат плоскости P. Поэтому (1.50) и (1.51) являются искомыми уравнениями плоскости, причем (1.50) называется *уравнением плоскости в векторной форме*.

Приведем уравнение (1.51) к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1.52}$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Уравнение (1.52) называется *общим уравнением плоскости* P с нормальным вектором $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

Покажем, что любое уравнение вида (1.52), в котором хотя бы один из коэффициентов A, B и C отличен от нуля, определяет плоскость с нормальным вектором $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

В самом деле, пусть $M = (x, y, z)$ — произвольная точка, удовлетворяющая уравнению (1.52), а $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка, тоже удовлетворяющая ему, т. е. имеет место равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычитая это равенство из уравнения (1.52), получим соотношение (1.51), определяющее искомую плоскость.

Уравнение плоскости, параллельной двум данным векторам. Составим уравнение плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам $\mathbf{a}^1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\mathbf{a}^2 = (m_2, n_2, p_2)$ и проходящей через данную точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (рис. 1.19).

Этот случай легко сводится к предыдущему, если учесть, что вектор $\mathbf{n}$, ортогональный векторам $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$, определяется соотношением (1.44). Отсюда и из (1.51) получаем искомое уравнение плоскости в виде

$$\begin{vmatrix} n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} m_1 p_1 \\ m_2 p_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0. \quad (1.53)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$; $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — три заданные точки пространства. Тогда векторы $\boldsymbol{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\boldsymbol{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$, очевидно, параллельны этой плоскости. В силу формулы (1.44) вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярный к $\boldsymbol{M_0M_1}$ и $\boldsymbol{M_0M_2}$, имеет вид

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} \right).$$

Отсюда и из уравнения (1.53) получим искомое уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} (y - y_0) + \\ + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0. \quad (1.54)$$

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (1, 0, -2)$ параллельно векторам $\mathbf{a}^1 = (2, -1, 0)$ и $\mathbf{a}^2 = (0, -1, 2)$.

Решение. Нормальный вектор плоскости, согласно равенству (1.44), имеет вид

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2, -4, -2).$$

Тогда из выражения (1.53) получим искомое уравнение плоскости

$$-2(x - 1) - 4(y - 0) - 2(z + 2) = 0 \Rightarrow x + 2y + z + 1 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0 = (1, 0, -1)$; $M_1 = (2, -1, 1)$; $M_2 = (0, 1, -2)$.

Решение. Имеем $\boldsymbol{M_0M_1} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{M_0M_2} = (-1, 1, -1)$. В таком случае

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 0).$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$-1(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z + 1) = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0.$$

Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Пусть $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор нормали к плоскости P, проведенный к плоскости из начала координат. Тогда его координатами будут направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\mathbf{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Если $M = (x, y, z)$ — произвольная точка плоскости P с радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$, то при любом положении точки M на плоскости $\mathrm{пр}_{\mathbf{n}^0}\mathbf{r} = p$, где p — длина перпендикуляра OD (рис. 1.20).

Но так как вектор $\mathbf{n}^0$ — единичный, то $\text{пр}_{\mathbf{n}^0}\mathbf{r} = (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0)$, так что для любой точки M плоскости P справедливо векторное равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) - p = 0, \quad p \geqslant 0. \qquad (1.55)$$

Соотношение (1.55) называется *нормальным векторным уравнением плоскости*, ему удовлетворяет радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой точки плоскости P. Очевидно, при $p = 0$ плоскость проходит через начало координат.

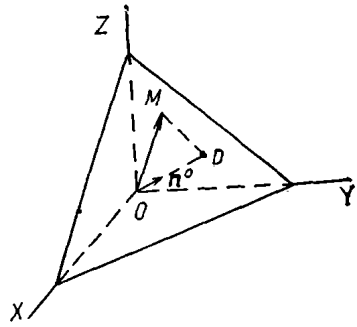


Рис. 1.20

В координатной форме уравнение (1.55) записывается так:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad (p \geqslant 0) \qquad (1.56)$$

и называется *нормальным уравнением плоскости* или *уравнением плоскости в нормальном виде*.

Если плоскость P задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то, разделив его обе части на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, где знак перед радикалом выбирается противоположным знаку D, мы приведем общее уравнение плоскости к нормальному виду (1.56), т. е. к уравнению

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (1.57)$$

Множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm|\mathbf{n}|} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ называется *нормирующим множителем* уравнения плоскости.

Пример 3. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Решение. Находим $\mu = -\dfrac{1}{|\mathbf{n}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = -\dfrac{1}{7}$. Нормальное уравнение данной плоскости имеет вид

$$-\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 2 = 0 \left(\mathbf{n}^0 = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right), \ p = 2\right).$$

Определим расстояние ρ от точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной векторным уравнением (1.55).

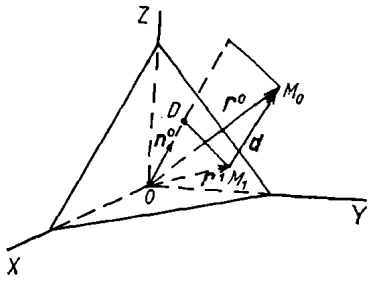


Рис. 1.21

Пусть M_1 — основание перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки M_0 (рис. 1.21). Обозначим $\boldsymbol{OM}_0 = \mathbf{r}^0$, $\boldsymbol{OM}_1 = \mathbf{r}^1$, $\boldsymbol{M_1M_0} = \mathbf{d}$. Так как точка M_1 лежит на плоскости, то ее радиус-вектор $\mathbf{r}^1$ удовлетворяет уравнению (1.55), т. е. $(\mathbf{r}^1, \mathbf{n}^0) - p = 0$. Искомое расстояние ρ в силу коллинеарности векторов $\mathbf{d}$ и $\mathbf{n}^0$ может быть найдено по формуле $\rho = |(\mathbf{d}, \mathbf{n}^0)|$, причем, очевидно,

$|(\mathbf{d}, \mathbf{n}^0)|$ положительно, если точка и начало координат находятся по разные стороны от заданной плоскости ($(\widehat{\mathbf{n}^0, \mathbf{d}}) = 0$), и отрицательно, если они находятся по одну сторону от нее (в этом случае $(\widehat{\mathbf{n}^0, \mathbf{d}}) = \pi$). Но $\mathbf{d} = \mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^1$, поэтому $\rho = |(\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}^1, \mathbf{n}^0)| = |(\mathbf{r}^0, \mathbf{n}^0) - (\mathbf{r}^1, \mathbf{n}^0)| = |(\mathbf{r}^0, \mathbf{n}^0) - p|$, так как $(\mathbf{r}^1, \mathbf{n}^0) = p$.

Таким образом, искомое расстояние $\rho = |(\mathbf{r}^0, \mathbf{n}^0) - p|$ или в координатной форме

$$\rho = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1.58)$$

в силу уравнения (1.57), т. е. *расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине результата подстановки координат точки в левую часть нормального уравнения плоскости.*

Величина $\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p$ называется *отклонением* точки (x_0, y_0, z_0) от плоскости. При этом, как было показано выше, $\delta > 0$, если точка M_0 и начало координат O лежат по разные стороны от плоскости, и $\delta < 0$, если M_0 и O лежат по одну сторону от нее. Очевидно, $\rho = |\delta|$.

Пример 4. Определить расстояние от точки $M_0 = (1, 2, 4)$ до плоскости $2x + 2y - z - 11 = 0$.

Решение. Используя формулу (1.58), находим

$$\rho = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 11|}{3} = 3.$$

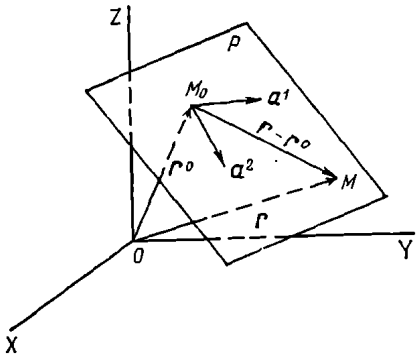


Рис. 1.22

Параметрические уравнения плоскости. Пусть плоскость P определена двумя неколлинеарными векторами $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$ и точкой $M_0 \in P$, радиус-вектор которой $\mathbf{r}^0$ (рис. 1.22). Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки M этой плоскости. Тогда вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}^0 = \overrightarrow{M_0M}$ лежит в рассматриваемой плоскости. Следовательно, найдутся такие числа t и s, что

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}^0 = t\mathbf{a}^1 + s\mathbf{a}^2. \quad (1.59)$$

Это соотношение называется *векторным параметрическим уравнением плоскости*. Меняя в нем числа t и s, будем получать радиус-векторы точек плоскости P. Если $M = (x, y, z)$; $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $\mathbf{a}^1 = (m_1, n_1, p_1)$; $\mathbf{a}^2 = (m_2, n_2, p_2)$, то из уравнения (1.59) получаем

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= tm_1 + sm_2; \\ y - y_0 &= tn_1 + sn_2; \\ z - z_0 &= tp_1 + sp_2. \end{aligned}\right\} \quad (1.60)$$

Уравнения (1.60) называются *параметрическими уравнениями плоскости.*

Перейдем теперь от параметрических уравнений плоскости (1.60) к уравнению вида (1.51). Для этого из уравнений (1.60) исключим параметры t и s. Из первых двух уравнений (1.60) легко найдем

$$t = \frac{(x - x_0)n_2 - (y - y_0)m_2}{\Delta}; \quad s = \frac{(y - y_0)m_1 - (x - x_0)n_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta = m_1n_2 - n_1m_2 = \begin{vmatrix} m_1n_1 \\ m_2n_2 \end{vmatrix}.$$

Подставив t и s в третье уравнение (1.60), получим

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)p_1n_2 - (y - y_0)p_1m_2}{\Delta} + \frac{(y - y_0)m_1p_2 - (x - x_0)n_1p_2}{\Delta}$$

или

$$(n_1p_2 - p_1n_2)(x - x_0) - (m_1p_2 - p_1m_2)(y - y_0) + (m_1n_2 - n_1m_2)(z - z_0) = 0,$$

что равносильно уравнению (1.51).

Прямая в пространстве как линия пересечения двух плоскостей. Всякие две пересекающиеся плоскости P_1 и P_2, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} P_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ P_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned} \tag{1.61}$$

определяют в пространстве прямую L — линию их пересечения. Уравнения (1.61) называются *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Возникает вопрос: как от общих уравнений прямой перейти к каноническим уравнениям вида (1.45)?

Пусть L — прямая, определяемая уравнениями (1.61). Тогда любой вектор $\mathbf{a}$, параллельный L, будет ортогонален вектору нормали $\mathbf{n}^1 = (A_1, B_1, C_1)$ к плоскости P_1 и нормали $\mathbf{n}^2 = (A_2, B_2, C_2)$ к плоскости P_2. Согласно формуле (1.44), направляющий вектор $\mathbf{a}$ прямой L имеет вид

$$\mathbf{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1C_1 \\ A_2C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{1.62}$$

Координаты любой точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой L, можно найти как решение системы уравнений (1.61). Найдя эту точку, по формулам (1.45) составим искомые уравнения прямой L в каноническом виде:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1C_1 \\ A_2C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.63}$$

Пример 5. Пусть прямая задана уравнениями

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z - 5 &= 0; \\ 5x + y + 2z + 3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Найти ее канонические уравнения.

Р е ш е н и е. Направляющий вектор данной прямой, согласно равенству (1.62), равен

$$\mathbf{a} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4,\ 8,\ -14).$$

Для нахождения точки $M_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ прямой уравнения (1.64) приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 - 2z; \\ 5x + y &= -3 - 2z. \end{aligned}\right\}$$

Умножим первое уравнение этой системы на 5 и полученный результат вычтем из второго уравнения. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 - 2z; \\ -14y &= -28 + 8z. \end{aligned}\right\}$$

Полагая z равным произвольному числу z_0, например $z_0 = 0$, из данной системы найдем $y_0 = 2$ и $x_0 = -1$. По формулам (1.63) записываем искомые канонические уравнения

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{8} = \frac{z}{-14}.$$

Условие параллельности двух прямых. Пусть даны две прямые

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};\quad L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

с направляющими векторами $\mathbf{a}^1 = (m_1,\ n_1,\ p_1)$ и $\mathbf{a}^2 = (m_2,\ n_2,\ p_2)$ соответственно. Параллельность двух прямых означает, очевидно, коллинеарность их направляющих векторов. Поэтому

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \mathbf{a}^1 \parallel \mathbf{a}^2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (1.65)$$

Условие параллельности (перпендикулярности) прямой и плоскости. Если прямая $L : \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ с направляющим вектором $\mathbf{a} = (m,\ n,\ p)$ параллельна (перпендикулярна) плоскости $P : Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\mathbf{n} = (A,\ B,\ C)$, то, очевидно, из рис. 1.23

$$L \parallel P \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow mA + nB + pC = 0 \qquad (1.66)$$

и из рис. 1.24

$$L \perp P \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \qquad (1.67)$$

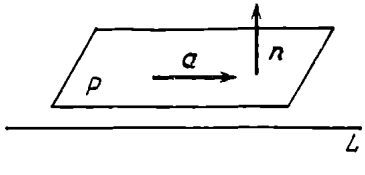


Рис. 1.23

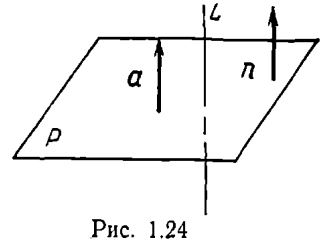


Рис. 1.24

Условие параллельности двух плоскостей. Две плоскости

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (1.68)$$

параллельны, если параллельны их нормальные векторы. Таким образом,

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}^1 \parallel \mathbf{n}^2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (1.69)$$

Угол между двумя плоскостями. Если коэффициенты A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 плоскостей (1.68) не пропорциональны, то плоскости P_1 и P_2 пересекаются по некоторой прямой L_0. Проведем плоскость P, перпендикулярную к линии L_0. Эта плоскость пересекается с P_1 и P_2 по прямым L_1 и L_2. Угол φ между прямыми L_1 и L_2 называется *углом между плоскостями* P_1 и P_2. Поскольку $\mathbf{n}^1 \perp P_1$ и $\mathbf{n}^2 \perp P_2$, то угол между векторами $\mathbf{n}^1$ и $\mathbf{n}^2$ равен углу φ между плоскостями P_1 и P_2 (рис. 1.25). Тогда

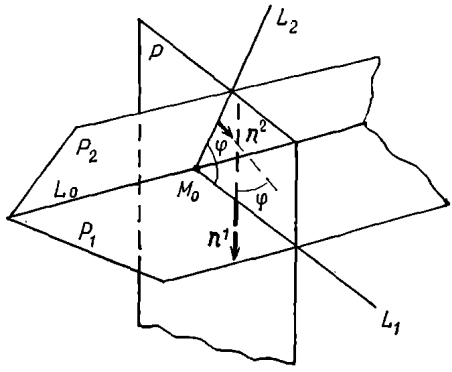


Рис. 1.25

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2}) = \frac{(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)}{|\mathbf{n}^1| \cdot |\mathbf{n}^2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1.70)$$

и есть косинус искомого угла между плокостями P_1 и P_2.

Угол между прямой и плоскостью. *Углом между прямой L и плоскостью P* называется угол ψ, образованный прямой L и ее проекцией на плоскости P (рис. 1.26). Очевидно, этот угол не может превышать $\frac{\pi}{2}$. Если прямая L задана каноническими уравнениями (1.45), а плоскость P — общим уравнением (1.52), то

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{a}}) = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{a})|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi.$$

Поскольку $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin\psi \geqslant 0$, т. е.

$$\sin\psi = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{a})|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|}. \quad (1.71)$$

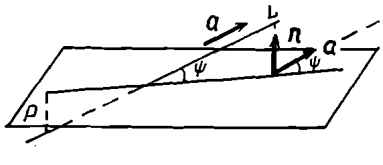


Рис. 1.26

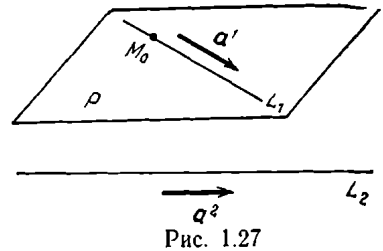


Рис. 1.27

Пример 6. Составить уравнение плоскости P, проходящей через прямую L: $\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1}$ параллельно прямой L_2: $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ (рис. 1.27).

Решение. Вектор $\mathbf{a}^1=(m_1, n_1, p_1) \parallel P$, так как прямая L лежит в плоскости P. По условию $P \parallel L_2$, т. е. $\mathbf{a}^2=(m_2, n_2, p_2) \parallel P$. Итак, плоскость P проходит через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$. Тогда ее уравнение имеет вид (1.53).

Расстояние между скрещивающимися прямыми. Две прямые L и L_1 называются *скрещивающимися,* если они не параллельны и не пересекаются. Следовательно, скрещивающиеся прямые не могут лежать в одной плоскости, но всегда существует плоскость P, параллельная этим прямым. Если L: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$; L_1: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ — две скрещивающиеся прямые, то в примере 6 построена плоскость P, описываемая уравнением (1.53), которая параллельна и прямой L, и прямой L_1 (рис. 1.28).

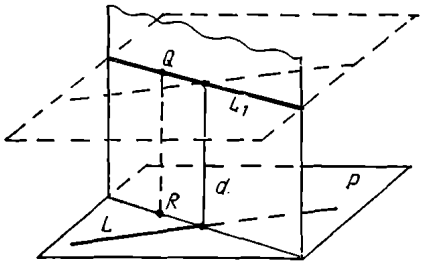


Рис. 1.28

Расстоянием $\rho(L, L_1)$ между скрещивающимися прямыми L и L_1 называется длина общего перпендикуляра, опущенного из одной прямой на другую.

Получить формулу для $\rho(L, L_1)$ нетрудно. Проводим плоскость P через прямую L, параллельную прямой L_1. Уравнение этой плоскости имеет вид (1.53). Так как прямая $L_1 \parallel P$, то расстояние от любой точки прямой L_1 до плоскости P одно и то же и равно $\rho(L, L_1)$. На прямой L_1 дана одна точка $Q=(x_1, y_1, z_1)$. Воспользовавшись теперь формулой (1.58) расстояния от точки Q до плоскости P, получим

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} n & p \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}(x_1-x_0)-\begin{vmatrix} m & p \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}(y_1-y_0)+\begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}(z_1-z_0)\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n & p \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m & p \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}=$$
$$=\rho(L, L_1). \qquad (1.72)$$

Задачи и упражнения

1. Через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ провести прямую L, перпендикулярную к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

2. Найти такие числа x и y, чтобы точка $C=(x, y, 0)$ принадлежала прямой, проходящей через точки $P=(4, 3, -1)$ и $Q=(2, 8, 2)$.

3. На прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{3}$ найти точку, удаленную от точки $A=(-1, 3, 4)$ на $\sqrt{14}$ единиц.

4. В какой точке прямая $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$ пересекает плоскость $x=2$?

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = t$; $y = 2t$; $z = 3t$ и точку $A = (4, -1, 0)$.

6. Найти числа a, при которых плоскости $ax + 2ay + 10z = 2$ и $x + 2y + 5z = 7$ параллельны (перпендикулярны).

7. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного к плоскости, проходящей через точки $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ и $C = (1, 0, -1)$.

8. Написать параметрические уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$ и $x + y - 2z + 3 = 0$.

9. Определить взаимное положение прямой и плоскости. Если прямая и плоскость пересекаются, найти точку пересечения:

а) $L: x = 2y = 3z$; $P: 8x - 6y + 7z = 330$;

б) $L: x = t$, $y = 2 + 2t$, $z = 4t$; $P: 2x - 3y - 5z + 6 = 0$;

в) $L: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$; $P: x + 2y - 4z + 8 = 0$.

10. Дана плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$ и вне ее точка $M = (1, 1, 1)$. Найти точку N, симметричную M относительно данной плоскости.

11. Найти расстояние между параллельными прямыми $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$; $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

12. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$ на плоскость $x + 3y - z - 5 = 0$.

1.6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение линейного пространства. В § 1.3 определена операция сложения свободных векторов из $\mathbf{R}^3$ и операция умножения векторов на действительные числа, а также перечислены свойства этих операций. Распространение этих операций и их свойств на множество объектов (элементов) произвольной природы приводит к обобщению понятия линейного пространства геометрических векторов из $\mathbf{R}^3$, определенного в § 1.3.

Сформулируем определение векторного пространства. Множество V элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ ... называется *линейным* или *векторным пространством*, если:

1) имеется правило, которое каждым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из V ставит в соответствие третий элемент из V, называемый *суммой* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначаемый $\mathbf{x} + \mathbf{y}$;

2) имеется правило, которое каждому элементу $\mathbf{x} \in V$ и любому действительному числу α ставит в соответствие элемент из V, называемый *произведением* элемента $\mathbf{x}$ на число α и обозначаемый $\alpha\mathbf{x}$.

При этом сумма двух элементов $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ и произведение $\alpha\mathbf{x}$ элемента на число должны удовлетворять следующим требованиям — аксиомам линейного пространства:

1°. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность сложения).

2°. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность сложения).

3°. существует элемент $\mathbf{0} \in V$, называемый нулевым, такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

4°. Для любого $\mathbf{x} \in V$ существует элемент $(-\mathbf{x})$, называемый противоположным для $\mathbf{x}$, такой, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

5°. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

6°. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

7°. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

8°. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

Элементы линейного пространства будем называть *векторами* независимо от их природы.

Из аксиом 1° — 8° следует, что в любом линейном пространстве V:

1) существует единственный нулевой вектор;

2) для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$ существует единственный противоположный вектор $(-\mathbf{x}) \in V$, причем $(-\mathbf{x}) = (-1)\mathbf{x}$.

3) для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Докажем, например, первое утверждение. Допустим, что в пространстве V существуют два нуля: $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Положив в аксиоме 3° $\mathbf{x} = \mathbf{0}_1$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_2$ получим $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$. Аналогично, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_1$, то $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Учитывая аксиому 1°, получаем $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. ■

Доказательство утверждений 2 и 3 рекомендуем провести читателю самостоятельно.

Примеры линейных пространств. 1. Множество действительных чисел образует линейное пространство $\mathbf{R}$. Аксиомы 1° — 8° в нем, очевидно, выполняются.

2. Множество свободных векторов пространства, как показано в § 1.3, также образует линейное пространство, обозначаемое $\mathbf{R}^3$. Нулем этого пространства служит нулевой вектор.

Множество векторов на плоскости и на прямой также являются линейными пространствами. Будем обозначать их $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^1$ соответственно.

3. Обобщением пространства $\mathbf{R}^3$ служит пространство $\mathbf{R}^n$, $n \in N$, называемое *арифметическим n-мерным пространством*, элементами (векторами) которого являются упорядоченные совокупности n произвольных действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е.

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Удобно использовать обозначение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при этом x_i называется i-й координатой (компонентой) вектора $\mathbf{x}$.

Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ определим сложение и умножение на число следующими формулами:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);$$
$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Нулевым элементом пространства $\mathbf{R}^n$ является вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Равенство двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из $\mathbf{R}^n$, по определению, означает равенство соответствующих координат, т. е. $(\mathbf{x} = \mathbf{y}) \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n)$.

Выполнение аксиом 1° — 8° очевидно.

4. Пусть $C_{[a, b]}$ — множество непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Суммой функций f и g из $C_{[a, b]}$ называется функция $h = f + g$, определяемая равенством

$$h = f + g \Leftrightarrow h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in [a, b].$$

Произведение функции $f \in C_{[a,\ b]}$ на число $\alpha \in \mathbf{R}$ определяется равенством

$$u = \alpha f \Leftrightarrow u(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in [a,\ b].$$

Так введенные операции сложения двух функций и умножения функции на число превращают множество $C_{[a,\ b]}$ в линейное пространство, векторами которого являются функции. Аксиомы 1° — 8° в этом пространстве, очевидно, выполняются. Нулевым вектором этого пространства является нулевая функция, а равенство двух функций f и g означает, по определению, следующее:

$$(f = g) \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad \forall x \in [a,\ b].$$

Линейная зависимость векторов. Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ — векторы линейного пространства V и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа. Вектор

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}^i \tag{1.73}$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *коэффициентами линейной комбинации*. Говорят, что множество векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ *порождает пространство* V, если каждый вектор $\mathbf{y}$ из V может быть представлен в виде (1.73). Векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ линейного пространства V называются *линейно-зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}^n = \mathbf{0}. \tag{1.74}$$

Если же равенство (1.74) выполняется лишь в единственном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ называются *линейно-независимыми*.

Понятие линейной зависимости векторов в $\mathbf{R}^3$ введено в § 1.3. Там же показано, что если векторы линейно-зависимы, то один из них является линейной комбинацией остальных векторов.

Это доказательство дословно переносится на случай любого линейного пространства V.

Верно и обратное: если один из векторов из $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ является линейной комбинацией остальных, то указанные векторы линейно-зависимы.

Действительно, пусть, например, $\mathbf{x}^1 = \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \alpha_3 \mathbf{x}^3 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}^n$. Тогда $(-1)\,\mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}^n = \mathbf{0}$. Так как $-1 \neq 0$, то последнее равенство и устанавливает линейную зависимость векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.5. 1) Если среди векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ содержится нулевой вектор, то $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ линейно-зависимы.

2) Если среди векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ имеется $k\ (k < n)$ линейно-зависимых векторов, то и вся совокупность векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ линейно-зависима.

3) Если векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ линейно-независимы, то и любая часть этих векторов линейно-независима.

Доказательство. 1) Если вектор $\mathbf{x}^k = \mathbf{0}$, то из равенства $0 \cdot \mathbf{x}^1 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x}^{k-1} + 1 \cdot \mathbf{x}^k + 0 \cdot \mathbf{x}^{k+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x}^n = \mathbf{0}$ и вытекает линейная зависимость векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$.

2) Пусть векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$, $k < n$, линейно-зависимы. Тогда из равенства $\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$, в котором среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ хотя бы одно не равно нулю, получим равенство $\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{x}^k + 0 \cdot \mathbf{x}^{k+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x}^n = \mathbf{0}$, которое и означает линейную зависимость всех векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$.

3) Пусть векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ линейно-независимы. Если бы некоторая часть этих векторов образовала линейно-зависимую систему, то на основании второго свойства вся система $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ была бы линейно-зависимой. ■

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие понятие линейной зависимости векторов.

Пример 1. В линейном пространстве $\mathbf{R}^3$ векторы $\mathbf{x}^1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{x}^2 = (2, 1, 3)$ и $\mathbf{x}^3 = (14, -2, 12)$, очевидно, линейно-зависимы, так как имеет место равенство $3\mathbf{x}^1 + 2\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 = 0$.

Пример 2. Три функции $f_1 = 1$; $f_2 = \cos 2x$; $f_3 = \sin^2 x$ линейно-зависимы, поскольку $f_1 - f_2 - 2f_3 = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Пример 3. Покажем, что в пространстве $C_{[a, b]}$ векторы $\mathbf{y}^1 = 1$, $\mathbf{y}^2 = \mathrm{x}$, $\mathbf{y}^3 = x^2$, ..., $\mathbf{y}^{n+1} = x^n$, где n — любое целое положительное число, линейно-независимы. Для этого достаточно убедиться, что равенство

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}, \tag{1.75}$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$.

Действительно, полагая в равенстве (1.75) $x_0 = 0$, получаем $\alpha_1 = 0$. Тогда находим $x(\alpha_2 + \alpha_3 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n-1}) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Последнее соотношение для всех $x \in \mathbf{R}$ возможно, если $\alpha_2 + \alpha_3 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n-1} = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Полагая здесь снова $x_0 = 0$, получаем $\alpha_2 = 0$. Продолжая эти рассуждения, на $n+1$-м шаге имеем $\alpha_{n+1} = 0$, т.е. равенство (1.75) возможно при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$.

Пример 4. В пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим векторы

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e}^2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ \mathbf{e}^n = (0, 0, \ldots, 1). \tag{1.76}$$

Покажем, что они линейно-независимы. Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа. Тогда

$$\alpha_1\mathbf{e}^1 + \alpha_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}^n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 (1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n (0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0,$$

т.е. векторы $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ — линейно-независимы.

Базис и размерность линейного пространства. Говорят, что множество векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ *порождает пространство* V, если любой вектор $\mathbf{x}$ из V есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$. Совокупность линейно-независимых векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$, по-

рождающих линейное пространство V, называют *базисом* этого *пространства*.

Если $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ — базис пространства V, то для любого $\mathbf{x} \in V$ имеет место равенство

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}^1 + a_2\mathbf{u}^2 + \ldots + a_n\mathbf{u}^n = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{u}^i . \qquad (1.77)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *координатами* или *компонентами вектора* $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$.

Докажем единственность представления (1.77). Допустим, что $\mathbf{x}$ можно представить еще и в виде $\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}^1 + b_2\mathbf{u}^2 + \ldots + b_n\mathbf{u}^n$. Вычтя это равенство из соотношения (1.77), получим $(a_1 - b_1)\mathbf{u}^1 + (a_2 - b_2)\mathbf{u}^2 + \ldots + (a_n - b_n)\mathbf{u}^n = \mathbf{0}$. Так как векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ линейно-независимы, то $a_i = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Как и в $\mathbf{R}^3$, линейные операции над векторами пространства V при заданном базисе приводят к обычным линейным операциям над числами — координатами этих векторов в данном базисе, т.е. если

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}^1 + a_2\mathbf{u}^2 + \ldots + a_n\mathbf{u}^n, \quad \mathbf{y} = b_1\mathbf{u}^1 + b_2\mathbf{u}^2 + \ldots + b_n\mathbf{u}^n,$$

то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a_1 + b_1)\mathbf{u}^1 + (a_2 + b_2)\mathbf{u}^2 + \ldots + (a_n + b_n)\mathbf{u}^n;$$
$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha a_1)\mathbf{u}^1 + (\alpha a_2)\mathbf{u}^2 + \ldots + (\alpha a_n)\mathbf{u}^n. \qquad (1.78)$$

Учитывая взаимно-однозначное соответствие между вектором и его координатами в выбранном базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$, будем писать

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}^1 + a_2\mathbf{u}^2 + \ldots + a_n\mathbf{u}^n \Leftrightarrow \mathbf{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \qquad (1.79)$$

Теорема 1.6. Если линейное пространство V имеет базис, состоящий из n элементов, то всякие p векторов из V при $p > n$ линейно-зависимы.

Доказательство. Согласно свойству 3 из теоремы 1.5, можно считать, что $p = n + 1$. Рассмотрим случай, когда пространство V имеет базис, состоящий из единственного элемента $\mathbf{u}$. Тогда для любых $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ имеем $\mathbf{x}^1 = a_1\mathbf{u}$ и $\mathbf{x}^2 = a_2\mathbf{u}$. Если a_1 и a_2 не равны нулю, то $a_2\mathbf{x}^1 - a_1\mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$ и, значит, векторы $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ линейно-зависимы. Если же $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, то векторы $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ тоже линейно-зависимы, так как среди них есть нулевой вектор.

Дальнейшие рассуждения продолжаем по индукции. Допустим, что в пространстве, базис которого состоит из $n - 1$ элемента, n векторов линейно-зависимы. Рассмотрим пространство V, имеющее базис $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$. Пусть $n + 1$ элементов из V имеют вид

$$\mathbf{x}^m = a_{m1}\mathbf{u}^1 + a_{m2}\mathbf{u}^2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{u}^n, \quad m = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Если в этом равенстве все a_{mn}, $m = 1, 2, \ldots, n, n + 1$, равны нулю, то векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n, \mathbf{x}^{n+1}$ принадлежат пространству, порожденному элементами $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^{n-1}$. Следовательно, по предположению индукции они линейно-зависимы. Пусть теперь хотя бы одно a_{mn}, например $a_{n+1\,n}$, отлично от нуля. Рассмотрим векторы

$$\mathbf{y}^m = \mathbf{x}^m - \frac{a_{mn}}{a_{n+1\,n}}\mathbf{x}^{n+1}, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Координаты вектора $\mathbf{y}^m$ при n-м элементе $\mathbf{u}^n$ базиса равны нулю, и, значит, по предположению индукции векторы $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно-зависимы. В таком случае существуют n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, которые удовлетворяют равенству $a_1\mathbf{y}^1 + a_2\mathbf{y}^2 + \ldots + a_n\mathbf{y}^n = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что

$$a_1\mathbf{x}^1 + a_2\mathbf{x}^2 + \ldots + a_n\mathbf{x}^n - \frac{1}{a_{n+1n}}(a_1 \cdot a_{1n} + \ldots + a_n a_{nn})\,\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{0}.$$

А так как не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю, то векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ являются линейно-зависимыми. ■

Следствие 1. Если пространство V имеет базис из n элементов и если p векторов из V линейно-независимы, то $p \leqslant n$.

Следствие 2. Если линейное пространство V имеет некоторый базис из n элементов, то и всякий другой базис пространства V состоит из n элементов.

Доказательство. Если $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^p$ — другой базис пространства V, то векторы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^p$ — линейно-независимы и по предыдущему следствию $p \leqslant n$. Поменяв местами базисы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^p$ и $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$, получаем, что $n \leqslant p$. Значит, $p = n$. ■

Если V — линейное пространство с конечным базисом, то число n элементов этого базиса называется *размерностью* пространства V. Размерность обозначается $\dim V$ (англ. dimension — размерность).

Линейное пространство V называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно-независимых векторов.

Теорема 1.7. Любую систему из k линейно-независимых векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k$, $k < n$, n-мерного пространства V можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $k < n$. Допустим, что к векторам $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k$ нельзя добавить вектор $\mathbf{u}^{k+1}$, такой, что векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}$ будут линейно-зависимы. Это значит, что в пространстве V имеется только k линейно-независимых векторов, т.е. $\dim V = k < n$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, к векторам $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k$ можно добавить вектор $\mathbf{u}^{k+1} \in V$, такой, что система векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}$ линейно-независима. Если $k+1 < n$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что можно добавить еще один вектор $\mathbf{u}^{k+2} \in V$ так, что векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+2}$ линейно-независимы. После конечного числа шагов получим ровно n линейно-независимых векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^{k+1}, \ldots, \mathbf{u}^n$, образующих, по определению, базис пространства V. ■

Приведем примеры базисов конкретных линейных пространств.

Пример 5. В пространстве $\mathbf{R}^3$ базис образует тройка единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ имеет вид $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, где α, β, γ — проекции вектора на оси координат.

Пример 6. В пространстве $\mathbf{R}^n$ базисом служит система векторов (1.76), так как эти векторы, как показано выше, линейно-независимы, и для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ справедливо разложение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + x_n\mathbf{e}^n$.

Пример 7. Пусть P_n — пространство многочленов степени не выше n. В примере 3 показано, что векторы $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно-независимы. Каждый многочлен $f(x) \in P_n(x)$ выражается через них очевидным образом: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Отсюда следует, что векторы $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют базис пространства P_n и $\dim P_n = n + 1$.

Пример 8. Примером бесконечномерного пространства может служить пространство $C_{[a, b]}$. В самом деле, для любого номера n система $n + 1$ векторов этого пространства $1, x, x^2, \ldots, x^n$, как показано в примере 3, является линейно-независимой.

Понятие подпространства и линейной оболочки. *Подпространством линейного пространства* V называется всякое подмножество $V_1 \subset V$, обладающее следующими свойствами:

1°. если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$.

2°. если $\mathbf{x} \in V_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha\mathbf{x} \in V_1$.

Убедимся, что подпространство $V_1 \subset V$, удовлетворяющее требованиям 1° и 2°, само является линейным пространством. Действительно, аксиомы 1°, 2°, 5° — 8° линейного пространства для векторов из V_1, очевидно, выполняются. Надо убедиться только в том, что нулевой вектор принадлежит V_1 и что для любого $\mathbf{x} \in V_1$ существует противоположный элемент $(-\mathbf{x}) \in V_1$.

В самом деле, если $\mathbf{x} \in V_1$, то и произведения $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ также принадлежат V_1.

Приведем примеры линейных подпространств.

Пример 9. Пусть $V = \mathbf{R}^2$. В этом пространстве рассмотрим множества V_1 и V_2 векторов вида $\mathbf{a} = (x, 0)$ и $\mathbf{b} = (0, y)$, где $\mathbf{a} \in V_1$ и $\mathbf{b} \in V_2$. Любые два вектора $\mathbf{a}^1 = (x_1, 0)$ и $\mathbf{a}^2 = (x_2, 0)$ из V_1 обладают свойствами

$$\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 = (x_1 + x_2, 0) \in V_1, \quad \alpha\mathbf{a} \in (\alpha x, 0) \in V_1.$$

Аналогично для векторов $\mathbf{b}^1 = (0, y_1)$ и $\mathbf{b}^2 = (0, y_2)$ из V_2 имеем

$$\mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2 = (0, y_1 + y_2) \in V_2, \quad \alpha\mathbf{b} = (0, \alpha y) \in V_2.$$

Таким образом, V_1 и V_2 — подпространства пространства $\mathbf{R}^2$. Подпространство V_1 состоит из векторов, параллельных оси X, а подпространство V_2 образуют векторы, параллельные оси Y.

Пример 10. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathbf{R}^3$. Векторы вида $\mathbf{a} = (x, 0, 0)$, или вида $\mathbf{b} = (0, y, 0)$, или вида $\mathbf{c} = (0, 0, z)$ образуют три самостоятельных линейных подпространства в $\mathbf{R}^3$. Аналогично векторы вида $\mathbf{a}^1 = (0, y, z)$; $\mathbf{b}^1 = (x, 0, z)$ и $\mathbf{c}^1 = (x, y, 0)$ тоже образуют линейные подпрсстранства в $\mathbf{R}^3$ векторов, параллельных плоскостям YZ, XZ и XY соответственно.

Пример 11. Пусть $V = C_{[a, b]}$, а V_1 — множество функций f из $C_{[a, b]}$, таких, что $f(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$. Если $f_1(x_0) = 0$, $f_2(x_0) = 0$, то $f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0$ и $\alpha f_1(x_0) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$. Значит, V_1 — подпространство пространства $C_{[a, b]}$.

Если в n-мерном пространстве V всякие $n + 1$ векторов линейно-зависимы, то это утверждение и подавно выполнено в подпространстве $V_1 \subset V$, т.е. $\dim V_1 \leqslant \dim V$. Другими словами, *размерность подпространства не превосходит размерности самого пространства.*

Важным в теории линейных пространств является понятие линейной оболочки.

Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ — система векторов линейного пространства V. *Линейной оболочкой*, порожденной векторами $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$, на-

зывается совокупность всех линейных комбинаций вида $y = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — любые числа из $\mathbf{R}$, и обозначается $L(x^1, x^2, \ldots, x^k)$.

Легко показать, что *линейная оболочка* $L(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ *является подпространством линейного пространства* V. Действительно, пусть $y^1 = \alpha_1' x^1 + \alpha_2' x^2 + \ldots + \alpha_k' x^k$, $y^2 = \alpha_1'' x^1 + \alpha_2'' x^2 + \ldots + \alpha_k'' x^k$ — произвольные элементы из $L(x^1, x^2, \ldots, x^k)$.
Тогда

$$y^1 + y^2 = (\alpha_1' + \alpha_1'') x^1 + (\alpha_2' + \alpha_2'') x^2 + \ldots + (\alpha_k' + \alpha_k'') x^k \in$$
$$\in L(x^1, x^2, \ldots, x^k), \quad \alpha y^1 = (\alpha\alpha_1') x^1 + (\alpha\alpha_2') x^2 + \ldots + (\alpha\alpha_k') x^k \in$$
$$\in L(x^1, x^2, \ldots, x^k).$$

Следовательно, $L(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ — подпространство линейного пространства V, а, значит, $\dim L \leqslant \dim V$, причем $\dim L = k$ тогда и только тогда, когда векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно-независимы.

Пересечение и прямая сумма пространств. Если V_1 и V_2 — два линейных пространства, то *пересечением* этих пространств называется совокупность $V_1 \cap V_2$ всех векторов x, принадлежащих как V_1, так и V_2, т.е.

$$V_1 \cap V_2 = \{x \mid x \in V_1 \text{ и } x \in V_2\}.$$

Покажем, что $V_1 \cap V_2$ образует линейное пространство. В самом деле, если x и y принадлежат $V_1 \cap V_2$, то они принадлежат и V_1, и V_2. Поэтому вектор $x + y$ и вектор αx, $\alpha \in \mathbf{R}$, также принадлежат и V_1 и V_2, т.е. $x + y \in V_1 \cap V_2$ и $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Совокупность всех векторов вида $y + z$, где $y \in V_1$, $z \in V_2$, называется *суммой пространств* V_1 и V_2 и обозначается $V_1 + V_2$, т.е.

$$V_1 + V_2 = \{y + z \mid y \in V_1, \ z \in V_2\}. \tag{1.80}$$

Пример 12. Пусть V_1 — пространство всех векторов вида $a = (0, y, z)$, а V_2 — пространство всех векторов вида $b = (x, 0, z)$. Тогда суммой этих пространств является множество векторов вида $a + b = (x, y, 2z)$, т.е. $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$. Пересечение пространств V_1 и V_2 есть множество векторов вида $(0, 0, z)$, т.е. $V_1 \cap V_2$ — множество векторов, параллельных оси Z.

Подпространства V_1 и V_2 линейного пространства V называются *дополнительными* в V, если выполнены соотношения

$$V_1 + V_2 = V, \ V_1 \cap V_2 = 0, \ 0 \in V. \tag{1.81}$$

В этом случае говорят, что пространство V представлено в виде *прямой суммы подпространств* V_1 и V_2.

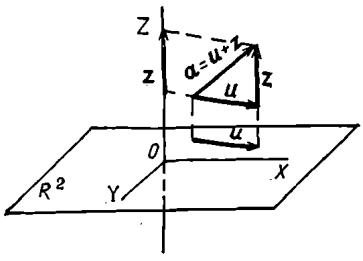


Рис. 1.29

Пример 13. В пространстве $\mathbf{R}^3$ выделим плоскость $X, Y = \mathbf{R}^2$ (рис. 1.29). Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ линейное подпространство $\mathbf{R}^1$ векторов вида $z = (0, 0, z)$, направленных параллельно оси Z. Векторы же, расположенные на плоскости $\mathbf{R}^2$, имеют вид $u = (x, y, 0)$. Общим вектором пространств $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$ является, очевидно, ну-

левой вектор $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Пусть $\mathbf{a} = (x, y, z)$ — любой вектор из $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathbf{a} = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) = \mathbf{u} + z$. Таким образом, *линейное пространство* $\mathbf{R}^3$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^1$.

Теорема 1.8. Для того чтобы пространство V являлось прямой суммой подпространств V_1 и V_2, необходимо и достаточно, чтобы всякий элемент $\mathbf{x} \in V$ единственным образом записывался в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2, \ \mathbf{x}^1 \in V_1, \ \mathbf{x}^2 \in V_2.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $V_1 + V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = 0$. Предположим, что $\mathbf{x} \in V$ имеет два представления $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y}^1 + \mathbf{y}^2$. Отсюда $\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^1 + \mathbf{y}^2$ или $\mathbf{x}^1 - \mathbf{y}^1 = \mathbf{y}^2 - \mathbf{x}^2$. Левая часть принадлежит V_1, а правая — V_2. Поскольку общим у V_1 и V_2 является нуль, то $\mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$, $\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2$.

Достаточность. Если для любого $\mathbf{x} \in V$ верно единственное разложение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2$, то, по определению, $V = V_1 + V_2$. Покажем теперь, что единственным элементом, общим у V_1 и V_2, является **0**. Действительно, если $\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2$ и $\mathbf{a} \neq 0$, то для $\mathbf{x}$ имеем двоякое представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1 - \mathbf{a}) + (\mathbf{x}^2 + \mathbf{a})$, что противоречит единственности. ■

В общем случае будем говорить, что пространство V разлагается в прямую сумму подпространств $V_1, V_2, \ldots, V_k$, если

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_k, \ V_i \cap V_j = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

В этом случае $\mathbf{x} \in V$ единственным образом представляется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{x}^k, \ \mathbf{x}^i \in V_i, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Например, в пространстве $\mathbf{R}^n$ рассмотрим подпространства $\mathbf{R}^1_{x_1}$, $\mathbf{R}^1_{x_2}$, ..., $\mathbf{R}^1_{x_n}$, порождаемые векторами вида $(x_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, x_2, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, x_n)$ соответственно. Поскольку $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)$, то $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^1_{x_1} + \mathbf{R}^1_{x_2} + \ldots + \mathbf{R}^1_{x_n}$. Кроме того, $\mathbf{R}^1_{x_j} \cap \mathbf{R}^1_{x_k} = 0$, т.е. указанная сумма — прямая.

Теорема 1.9. Если пространство V представлено в виде прямой суммы пространств V_1 и V_2, то $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Доказательство. Из соотношения $V = V_1 + V_2$ следует, что для любого $\mathbf{x} \in V$ справедливо равенство $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2$, где $\mathbf{x}^1 \in V_1$, $\mathbf{x}^2 \in V_2$. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k$ — базис пространства V_1 ($\dim V_1 = k$) и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^r$ — базис пространства V_2 ($\dim V_2 = r$). Тогда для $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ имеют место разложения $\mathbf{x}^1 = \alpha_1\mathbf{u}^1 + \alpha_2\mathbf{u}^2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}^k$ и $\mathbf{x}^2 = \beta_1\mathbf{v}^1 + \beta_2\mathbf{v}^2 + \ldots + \beta_r\mathbf{v}^r$. Поскольку $V_1 \cap V_2 = 0$, то векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, v^1, v^2, \ldots, \mathbf{v}^r$ линейно-независимы (докажите это), и, значит, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 = \alpha_1\mathbf{u}^1 + \alpha_2\mathbf{u}^2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}^k + \beta_1\mathbf{v}^1 + \beta_2\mathbf{v}^2 + \ldots + \beta_r\mathbf{v}^r$.

Итак, векторы $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^r$ линейно-независимы и, согласно последнему равенству, порождают все пространство V. Значит, они образуют базис V и $\dim V = n = k + r$. ■

Задачи и упражнения.

1. Доказать, что векторы вида $\mathbf{b} = (0, y, z)$, где $y, z \in \mathbf{R}$, образуют линейное пространство.

2. Предположим, что начало всех векторов $\mathbf{a}$ плоскости $\mathbf{R}^2$ находится в точке $O = (0, 0)$. Выяснить, являются ли следующие совокупности векторов линейным пространством (если нет, то почему?):

а) все векторы, концы которых лежат в первой четверти плоскости;

б) все векторы, концы которых лежат в первой и третьей четвертях плоскости;

в) все векторы, концы которых расположены в первой и второй четвертях плоскости.

3. Будет ли линейным пространством множество всех многочленов данной степени n?

4. Доказать, что две функции f_1 и f_2 линейно-зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. $f_2(x) = Cf_1(x)$, $\forall x$, где C — константа.

5. Доказать, что функции 1, $1 - x$, $x^2 - x$ линейно-независимы. Пусть $2 - x + 3x^2$ — многочлен. Найти координаты этого многочлена в базисе 1, $1 - x$, $x^3 - x$.

6. Доказать, что векторы $\mathbf{a} = (1, 0, -2)$ и $\mathbf{b} = (3, 1, 0)$ линейно-независимы. Найти координаты вектора $\mathbf{c} = (0, 1, 6)$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

7. Описать линейные оболочки, порождаемые векторами:

а) $\mathbf{x}^1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{x}^2 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{x}^3 = (0, 0, 0, 0, 1)$;

б) $\mathbf{x}^1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{x}^2 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^3 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

Совпадают ли они?

8. Найти ненулевой вектор, который принадлежит как пространству, порожденному векторами $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ и $\mathbf{b} = (3, 2, 0)$, так и пространству, порожденному векторами $\mathbf{c} = (2, -1, 1)$ и $\mathbf{d} = (1, 0, 4)$. Дать геометрическую интерпретацию.

9. Найти размерность пространства, порожденного векторами вида $\mathbf{x} = (0, x_2, 0, 0, x_5)$ $\forall x_2, x_5 \in \mathbf{R}$.

10. При каком $a \in \mathbf{R}$ система векторов $\mathbf{a}^1 = (1, 0, 0, 0)$; $\mathbf{a}^2 = (0, 1, 0, 0,)$; $\mathbf{a}^3 = (0, 0, a, 0)$; $\mathbf{a}^4 = (1, 2, 3, 4)$ линейно-зависима?

1.7. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение евклидова пространства. Линейное пространство V называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ из V поставлено в соответствие действительное число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемое *скалярным произведением*, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ.\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V;\\
&2^\circ.\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V; \qquad (1.82)\\
&3^\circ.\ (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \forall \alpha \in \mathbf{R};\\
&4^\circ.\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0\ \forall \mathbf{x} \in V;\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

В дальнейшем, если не оговорено особо, будут рассматриваться евклидовы пространства конечной размерности n.

Приведем примеры конкретных евклидовых пространств.

Пример 1. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^3$ свободных векторов, в котором скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется равенством (1.27). Как показано в § 1.4, оно удовлетворяет аксиомам $1^\circ - 4^\circ$. Поэтому $\mathbf{R}^3$ — евклидово пространство.

Пример 2. Пусть $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ — базис линейного пространства V. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ этого пространства, заданных разложениями

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + x_n\mathbf{e}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\\
\mathbf{y} &= y_1\mathbf{e}^1 + y_2\mathbf{e}^2 + \ldots + y_n\mathbf{e}^n = (y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}
$$

введем скалярное произведение по формуле

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \tag{1.83}$$

В частности, в линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ формула (1.83) также определяет скалярное произведение, превращая его тем самым в евклидово пространство $\mathbf{R}^n$.

Проверка справедливости аксиом 1° — 4° не представляет труда. Следовательно, линейное пространство V, а значит, и $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением (1.83) является евклидовым.

Из аксиом 2° и 3° скалярного произведения следует, что если $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}^n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — числа из $\mathbf{R}$, а $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ — векторы из V, то

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\ \alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}^n) = \alpha_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y}^1) + \alpha_2(\mathbf{x},\ \mathbf{y}^2) + \ldots +$$

$$+ \alpha_n(\mathbf{x},\ \mathbf{y}^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ (\mathbf{x},\ \mathbf{y}^i). \tag{1.84}$$

Неравенство Коши — Буняковского. Покажем, что для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство

$$|(\mathbf{x},\ \mathbf{y})| \leqslant \sqrt{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})} \cdot \sqrt{(\mathbf{y},\ \mathbf{y})}, \tag{1.85}$$

называемое *неравенством Коши — Буняковского**, причем знак равенства в нем имеет место только в том случае, если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно-зависимы.

В самом деле, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то неравенство (1.85) очевидно, поэтому будем считать, что $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Рассмотрим вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$, где λ — любое действительное число. Поскольку $(\mathbf{z},\ \mathbf{z}) \geqslant 0$, то на основании формулы (1.84) имеем

$$(\mathbf{z},\ \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},\ \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{x}) + 2\lambda(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y},\ \mathbf{y}) \geqslant 0. \tag{1.86}$$

При $\lambda = -(\mathbf{x},\ \mathbf{y})/(\mathbf{y},\ \mathbf{y})$ из неравенства (1.86) получим

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{x}) - 2\frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{(\mathbf{y},\ \mathbf{y})}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y},\ \mathbf{y})^2}(\mathbf{y},\ \mathbf{y}) \geqslant 0$$

или

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y},\ \mathbf{y})} \geqslant 0 \Rightarrow (\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x},\ \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y},\ \mathbf{y}),$$

что равносильно неравенству (1.85).

Знак равенства в (1.86) возможен тогда и только тогда, когда $(\mathbf{z},\ \mathbf{z}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\lambda\mathbf{y}$, т.е. когда векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно-зависимы.

Из определения скалярного произведения в $\mathbf{R}^n$ (формула (1.83)) следует, что в $\mathbf{R}^n$ неравенство Коши — Буняковского принимает вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ . \tag{1.87}$$

* О. Коши (1798 — 1857) — французский математик; В. Я. Буняковский (1804 — 1889) — русский математик.

Норма вектора. Определим *норму* (или *длину*) *вектора* в евклидовом пространстве V равенством

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}, \tag{1.88}$$

которая в R^n имеет вид

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1.89}$$

Введенное таким образом понятие нормы вектора обобщает понятие длины вектора в пространстве R^3.

Перечислим свойства нормы вектора, непосредственно вытекающие из ее определения:

1°. $\| x \| \geqslant 0$, $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2°. $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$, $\forall \alpha \in R$, $\forall x \in V$.

В самом деле, $\| \alpha x \| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = | \alpha | \cdot \| x \|$.

3°. Норма удовлетворяет *неравенству треугольника* (неравенству Минковского*)

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|, \quad \forall x, y \in V. \tag{1.90}$$

Действительно, используя неравенство Коши — Буняковского (1.85), получаем

$$\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant \| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2,$$

что равносильно неравенству (1.90).

Расстояние. *Расстоянием* между векторами x и y евклидова пространства V назовем величину

$$\rho (x, y) = \| y - x \| = \sqrt{(y - x, y - x)}. \tag{1.91}$$

В пространстве R^n расстояние между $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, согласно равенствам (1.88) и (1.91), определяется равенством

$$\rho (x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \tag{1.92}$$

Расстояние $\rho (x, y)$ обладает следующими свойствами:

1°. $\rho (x, y) \geqslant 0$; $\rho (x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in V$.

Действительно, $\rho (x, y) = \sqrt{(y - x, y - x)} \geqslant 0$, $\rho (x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2°. $\rho (x, y) = \rho (y, x)$.

Это свойство вытекает из того, что $\| x - y \| = \| y - x \|$.

3°. Расстояние $\rho (x, y)$ удовлетворяет неравенству треугольника

$$\rho (x, y) \leqslant \rho (x, z) + \rho (z, y), \quad \forall x, y, z \in V.$$

В самом деле, в силу свойства 3° нормы

$$\rho (x, y) = \| x - y \| \leqslant \| x - z \| + \| z - y \| = \rho (x, z) + \rho (z, y).$$

---

* Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик.

Угол между векторами. Ортогональность. Из неравенства Коши—Буняковского для ненулевых векторов получаем

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow -(\|x\| \cdot \|y\|) \leqslant (x, y) \leqslant (\|x\| \cdot \|y\|)$$

или

$$-1 \leqslant \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что существует, и притом единственное, значение угла φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{1.93}$$

Назовем *углом между векторами* x и y евклидова пространства V угол φ, косинус которого определяется соотношением (1.93). Введенное понятие угла между векторами в пространстве обобщает понятие угла между векторами в $\mathbf{R}^3$.

Если $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ — базисные векторы пространства $\mathbf{R}^n$, то направляющие косинусы вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определим соотношениями

$$\cos(\widehat{x, e^i}) = \frac{(x, e^i)}{\|x\| \cdot \|e^i\|} = \frac{x_i}{\|x\|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $(\widehat{x, e^i})$ — угол между векторами x и $\mathbf{e}^i$ из $\mathbf{R}^n$.

Легко проверить, что $\sum_{i=1}^{n} \cos^2(\widehat{x, e^i}) = 1$.

Умножив ненулевой вектор x на число $1/\|x\|$, получим вектор $\mathbf{x}^0$, длина которого равна единице, т. е.

$$x^0 = \frac{1}{\|x\|}x = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|}\right) = (\cos(\widehat{x, e^1}), \cos(\widehat{x, e^2}), \ldots, \cos(\widehat{x, e^n})).$$

Отсюда следует, что координатами вектора единичной длины, как и в $\mathbf{R}^3$, служат направляющие косинусы этого вектора.

Два вектора x и y из V называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0. \tag{1.94}$$

Как и в $\mathbf{R}^3$, считается, что нулевой вектор ортогонален любому вектору x из V.

Из определения косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве следует, что для того, чтобы ненулевые векторы x и y были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы $\cos\varphi = 0$. Введенное понятие ортогональности в евклидовом пространстве соответствует обычному понятию перпендикулярности в $\mathbf{R}^3$.

Отметим, что ортогональность векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в $\mathbf{R}^n$ равносильна выполнению равенства

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 0. \tag{1.95}$$

Ортогональный базис. Попарно-ортогональные векторы в евклидовом пространстве V обладают одним важным свойством.

Покажем, что система попарно-ортогональных векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$, не содержащая нулевого вектора, линейно-независима. Убедимся, что равенство $\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}^k = \mathbf{0}$ возможно лишь при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. В самом деле, скалярно умножим обе части этого равенства на $\mathbf{x}^j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и, учитывая, что $(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) = 0$ $i \neq j$, получим $(\alpha_j\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) = \alpha_j(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Так как $(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^j) > 0$, то из последнего равенства имеем $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Итак, попарно-ортогональные ненулевые векторы линейно-независимы. Если их число равно n, где n — размерность пространства, то они образуют базис евклидова пространства, называемый *ортогональным базисом*. Если же нормы векторов ортогонального базиса равны единице, то базис называется *ортонормированным*.

Следовательно, базис из векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ называется ортонормированным, если

$$(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{1.96}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Очевидно, векторы $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ (см. систему векторов (1.76)) в силу условия (1.95) и формулы (1.96) образуют ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^n$. Частным случаем этого базиса является базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в $\mathbf{R}^3$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.10. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ — произвольный базис пространства V. Положим $\mathbf{v}^1 = \mathbf{x}^1$, $\mathbf{u}^1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}^1\|} \cdot \mathbf{v}^1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}^1\|} \cdot \mathbf{x}^1$. Пусть далее $\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 + \lambda_1\mathbf{u}^1$, где число λ_1 подберем так, чтобы векторы $\mathbf{v}^2$ и $\mathbf{u}^1$ были ортогональны, т. е.

$$((\mathbf{v}^2, \mathbf{u}^1) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^1) + \lambda_1(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = 0).$$

Так как $\mathbf{u}^1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}^1\|} \cdot \mathbf{x}^1$, $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = 1$, то отсюда находим, что

$$\left(\frac{(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^1\|} + \lambda_1 = 0\right) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^1\|} = -(\mathbf{x}^2, \mathbf{u}^1).$$

При этом значении λ_1 вектор $\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 - \dfrac{(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^1\|}\mathbf{x}^1$ ортогонален $\mathbf{u}^1$. Нормируя $\mathbf{v}^2$, получаем, что векторы $\mathbf{u}^2 = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}^2\|}\mathbf{v}^2$ и $\mathbf{u}^1$ образу-

ют ортонормированную пару. Далее, полагая $\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 + \lambda_1\mathbf{u}^1 + \lambda_2\mathbf{u}^2$ и подбирая λ_1 и λ_2 так, чтобы выполнялись условия $\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^1$ и $\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^2$, с учетом ортогональности векторов $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$, получаем

$$(\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^1) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3 + \lambda_1\mathbf{u}^1 + \lambda_2\mathbf{u}^2,\ \mathbf{u}^1) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^1) + \lambda_1 = 0);$$

$$(\mathbf{v}^3 \perp \mathbf{u}^2) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3 + \lambda_1\mathbf{u}^1 + \lambda_2\mathbf{u}^2,\ \mathbf{u}^2) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^2) + \lambda_2 = 0),$$

откуда $\lambda_1 = -(\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^1)$; $\lambda_2 = -(\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^2)$, т. е. $\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 - (\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^1)\,\mathbf{u}^1 - (\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^2)\,\mathbf{u}^2$.

Пронормировав $\mathbf{v}^3$, получим вектор $\mathbf{u}^3 = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}^3\|}\mathbf{v}^3$, который вместе с $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$ образует систему трех ортонормированных векторов. Продолжив этот процесс, после n шагов получим n ортонормированных векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$, которые в силу теоремы 1.9 образуют ортонормированный базис. ■

Указанный в теореме 1.10 алгоритм построения ортонормированного базиса называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта**, который, учитывая его сложность, рассмотрим подробно.

Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ — произвольные линейно-независимые векторы. Тогда ортонормированная система векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ получается по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}^1 = \mathbf{x}^1 && \mathbf{u}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^1\|}\mathbf{v}^1,\\
&\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}^2,\ \mathbf{u}^1)\,\mathbf{u}^1 && \mathbf{u}^2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^2\|}\mathbf{v}^2,\\
&\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 - (\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^1)\,\mathbf{u}^1 - (\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^2)\,\mathbf{u}^2 && \mathbf{u}^3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}^3\|}\mathbf{v}^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{v}^n = \mathbf{x}^n - (\mathbf{x}^n,\ \mathbf{u}^1)\,\mathbf{u}^1 - (\mathbf{x}^n,\ \mathbf{u}^2)\,\mathbf{u}^2 - \ldots - (\mathbf{x}^n,\ \mathbf{u}^{n-1})\,\mathbf{u}^{n-1} && \mathbf{u}^n = \frac{1}{\|\mathbf{v}^n\|}\mathbf{v}^n.
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Пример 3. Ортонормировать векторы $\mathbf{x}^1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{x}^2 = (-2,\ 1,\ 2)$ и $\mathbf{x}^3 = (1,\ -1,\ 0)$.

Решение. По формулам (1.97) получаем $\mathbf{v}^1 = \mathbf{x}^1 = (1,\ 0,\ 0) = \mathbf{u}^1$, $\mathbf{v}^2 = (-2,\ 1,\ 2) - (-2)(1,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 2) \Rightarrow \mathbf{u}^2 = \left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Далее, так как $(\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^1) = 1$, $(\mathbf{x}^3,\ \mathbf{u}^2) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, то $\mathbf{v}^3 = (1,\ -1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(0,\ -\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right) \Rightarrow \mathbf{u}^3 = \left(0,\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Легко видеть, что полученные векторы $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ и $\mathbf{u}^3$ ортонормированы.

Найдем выражение скалярного произведения в координатах для векторов x и y, заданных в произвольном ортонормированном базисе евклидова пространства V.

Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ — ортонормированный базис пространства V

* И. Грам (1850—1916) — датский математик; Э. Шмидт (1876—1959) — немецкий математик.

и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}^1 + y_2\mathbf{u}^2 + \ldots + y_n\mathbf{u}^n$ — векторы из V. Тогда в силу формул (1.84) и (1.96) получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}^i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{u}^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j) =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Итак, в ортонормированном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Выясним смысл координат произвольного вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе.

Теорема 1.11. Координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярному произведению этого вектора на соответствующие базисные векторы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ — ортонормированный базис и $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n$ — произвольный вектор. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{u}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) = x_1(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^i) + \ldots + x_i(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^i) + \ldots + x_n(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^i).$$

Отсюда в силу формулы (1.96) получаем

$$x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{u}^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \blacksquare \tag{1.98}$$

Так как $\|\mathbf{u}^i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то, как и в $\mathbf{R}^3$, скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) = x_i$ естественно назвать *проекцией вектора* $\mathbf{x}$ *на вектор* $\mathbf{u}^i$.

Таким образом, координаты вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе равны проекциям его на соответствующие базисные векторы.

Итак, формула

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}^i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}, \mathbf{u}^i)\mathbf{u}^i \tag{1.99}$$

представляет собой разложение произвольного вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ евклидова пространства.

Ортогональное дополнение. Вектор $\mathbf{x}$ евклидова пространства V называется *ортогональным подпространству* $L \subset V$, если он ортогонален любому вектору из L, т. е.

$$(\mathbf{x} \perp L) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \ \forall \mathbf{y} \in L) \Leftrightarrow ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ \forall \mathbf{y} \in L). \tag{1.100}$$

Если подпространство L порождено векторами $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ (является линейной оболочкой этих векторов, т. е. $L = L(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n)$), то

$$(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}^i, \ i = 1, 2, \ldots, n) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \perp L(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n)) \tag{1.101}$$

в силу формулы (1.84).

Равенство (1.101) в $\mathbf{R}^3$ выражает тот известный из элементарной геометрии факт, что вектор перпендикулярен к плоскости тогда и только тогда, когда он перпендикулярен к любым двум неколлинеарным векторам этой плоскости.

Два подпространства L и M пространства V называются *ортогональными*, если любой вектор подпространства L ортогонален любому вектору подпространства M, т. е.

$$(L \perp M) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \perp \mathbf{y},\ \forall \mathbf{x} \in L,\ \forall \mathbf{y} \in M) \Leftrightarrow ((\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = 0,\ \forall \mathbf{x} \in L,\ \forall \mathbf{y} \in M). \tag{1.102}$$

Если при этом пространства L и M дополнительны друг к другу в V (т. е. $V = L + M$, $L \cap M = 0$), то M называется *ортогональным дополнением к* L и обозначается $M = L^{\perp}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.12. Евклидово пространство V является прямой суммой подпространства L и его ортогонального дополнения, т. е.

$$(V = L + L^{\perp}) \Leftrightarrow ((\forall \mathbf{x} \in V) : \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z},\ \mathbf{y} \in L,\ \mathbf{z} \in L^{\perp}),$$

причем

$$n = \dim V = \dim L + \dim L^{\perp}. \tag{1.103}$$

В самом деле, из определения ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к L следует, что $V = L + L^{\perp}$, $L \cap L^{\perp} = 0$. Отсюда в силу теоремы 1.9 и получаем формулу (1.103).

Аффинное пространство. Координаты точки. Пусть имеется линейное пространство V и множество U элементов произвольной природы, называемых *точками* и обозначаемых прописными латинскими буквами, причем каждой упорядоченной паре точек M и N поставлен в соответствие единственный вектор $\mathbf{x} \in V$. При этом будем писать $\mathbf{x} = \boldsymbol{MN}$. Предполагается, что соответствие между точками и векторами обладает свойствами:

1°. Для каждой точки $M \in U$ и любого вектора $\mathbf{x} \in V$ существует единственная точка $M \in U$, такая, что $\boldsymbol{MN} = \mathbf{x}$.

2°. Для любых трех точек M, N, $P \in U$ справедливо соотношение $\boldsymbol{MN} + \boldsymbol{NP} = \boldsymbol{MP}$.

3. Для точек $M, N \in U$ справедливо соотношение $\boldsymbol{MN} = 0 \Leftrightarrow (M = N)$ (точки совпадают).

Множество U, удовлетворяющее условиям 1° — 3°, называется *аффинным пространством*, связанным с линейным пространством V.

Аффинное пространство называется n-мерным, если n-мерно соответствующее ему линейное пространство.

Теорема 1.13. Для любой точки $M \in U$ справедливо соотношение $\boldsymbol{MM} = 0$. Для любых двух точек M, $N \in U$ справедливо соотношение $\boldsymbol{MN} = -\boldsymbol{NM}$.

Доказательство. Из аксиомы 2° при $N = M$ и $P = N$ следует $2 \cdot \boldsymbol{MM} = \boldsymbol{MM} \Rightarrow \boldsymbol{MM} = 0$. Далее, из этой же аксиомы при $P = M$ получим $\boldsymbol{MN} + \boldsymbol{NM} = \boldsymbol{MM} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{MN} = -\boldsymbol{NM}$. ■

Пусть U — аффинное пространство. Выберем в нем какую-нибудь точку O и назовем ее *началом координат*. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ в силу аксиомы 1° найдется единственная точка M, такая, что $\boldsymbol{OM} = \mathbf{x}$. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное

соответствие между всеми точками M из U и векторами $\boldsymbol{OM} = \mathbf{x} \in V$. Вектор $\boldsymbol{OM} \in V$ называется *радиус-вектором* точки $M \in U$.

Пусть $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ — некоторый базис пространства V и вектор $\mathbf{x} = \boldsymbol{OM}$ имеет в этом базисе координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти же координаты припишем и соответствующей вектору x точке M и будем писать $\boldsymbol{M} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Итак, каждой точке n-мерного аффинного пространства в заданном базисе однозначно соответствует совокупность n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемых ее *координатами*.

Если $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $N = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — две точки аффинного пространства U, то в силу аксиомы 2°

$$(\boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MN} = \boldsymbol{ON}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{ON} - \boldsymbol{OM} = (y_1 - x_1)\,\mathbf{e}^1 + (y_2 - x_2)\,\mathbf{e}^2 + \ldots + (y_n - x_n)\,e^n),$$

т. е. координаты вектора $\boldsymbol{MN}$ равны разностям соответствующих координат его конца N и начала M:

$$\boldsymbol{MN} = (y_1 - x_1,\ y_2 - x_2,\ \ldots,\ y_n - x_n). \tag{1.104}$$

Заметим, что если векторы пространства V назвать точками пространства U и каждой упорядоченной паре точек x и y из V поставить в соответствие вектор $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, то, очевидно, линейное пространство V можно рассматривать как аффинное.

Расстоянием $\rho(M, N)$ между двумя точками M и N аффинного пространства называется длина вектора $\boldsymbol{MN}$, т. е. $\rho(M, N) = \|\boldsymbol{MN}\|$. В силу формулы (1.104)

$$\rho(M, N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2},$$

что для векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства совпадает с формулой (1.92).

Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, если угол между ними равен 0 или π.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Тогда, как и в случае пространства $\mathbf{R}^3$, легко получить, что

$$(\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}) \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}\right), \tag{1.105}$$

т. е. два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — вектор в $\mathbf{R}^n$, а $Q = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — некоторая точка в соответствующем аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$. Для любого $t \in \mathbf{R}$ вектор $t\mathbf{a}$ параллелен $\mathbf{a}$. В силу аксиомы 1° аффинного пространства найдется единственная точка $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такая, что $\boldsymbol{QM} = t\mathbf{a}$. Это соотношение называется *векторным параметрическим уравнением прямой в пространстве* $\mathbf{R}^n$, которое в координатной форме запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_1^0 &= ta_1; \\ x_2 - x_2^0 &= ta_2; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n - x_n^0 &= ta_n,\ t \in \mathbf{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + ta_1; \\ x_2 &= x_2^0 + ta_2; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n^0 + ta_n,\ t \in \mathbf{R}. \end{aligned}\right. \tag{1.106}$$

Исключив параметр t из уравнений (1.106), получим *канонические уравнения прямой в пространстве* $\mathbf{R}^n$:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}. \qquad (1.107)$$

Совокупность всех векторов, проходящих через точку Q, ортогональных вектору $\mathbf{a}$, называется *гиперплоскостью* H в $\mathbf{R}^n$ (плоскостью при $n = 3$).

Пусть $\mathbf{b}$ — произвольный вектор, ортогональный $\mathbf{a}$. По аксиоме 1° аффинного пространства существует единственная точка M, такая, что $\mathbf{b} = \boldsymbol{QM}$. Из условия ортогональности по формуле (1.104) получаем $(\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \boldsymbol{OM}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$ — радиус-векторы точек M и Q соответственно.

Перепишем полученное равенство в координатной форме. Имеем

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0. \qquad (1.108)$$

Уравнение (1.108) и есть искомое *уравнение гиперплоскости* H которое при $n = 3$ превращается в уравнение плоскости $a_1(x - x^0) + a_2(y - y^0) + a_3(z - z^0) = 0$, проходящей через точку $Q = (x^0, y^0, z^0)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Задачи и упражнения.

1. Найти направляющие косинусы вектора $\mathbf{a} = (1, 0, \sqrt{2}, 0, 1)$.
2. Доказать, что $(\mathbf{x} \perp \mathbf{R}^n) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = 0)$.
3. Доказать, что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — векторы евклидова пространства, то:
   а) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$;
   б) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{y})$;
   в) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$;
   г) $|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

4. Доказать, что ортогональное дополнение $L^\perp$ к линейному подпространству L в $\mathbf{R}^n$ обладает свойствами:
   а) $(L^\perp)^\perp = L$;
   б) $(L_1 \subset L_2) \Leftrightarrow L_2^\perp \subset L_1^\perp$;
   в) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;
   г) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M = (1, 0, -1, 4, -2)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (0, -1, 2, -3, 6)$.

6. Написать уравнение гиперплоскости, проходящей через точку $M = (1, 0, -1, 4, -2)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{a} = (0, -1, 2, -3, 6)$.

7. Проверить, что векторы $\mathbf{a}^1 = (1, 1, 1, -1)$, $\mathbf{a}^2 = (1, 1, -1, 1)$ и $\mathbf{a}^3 = (0, 0, 1, 1)$ попарно-ортогональны. Построить четвертый ненулевой вектор, ортогональный этим трем.

8. Показать, что векторы $\mathbf{a} = (2, -1, 6)$ и $\mathbf{b} = (-3, 4, 1)$ порождают то же самое пространство, что и векторы $\mathbf{u} = (8, -9, 4)$ и $\mathbf{v} = (-1, 3, 7)$.

9. Являются ли ортогональными подпространствами в $\mathbf{R}^3$ координатные плоскости?

1.8. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Понятие матрицы. *Матрицей* A размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{matrix} i \\ \\ \\ \end{matrix}\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{j}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы. Если $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной*, если $m = n$ — *квадратной порядка* n. Матрицу A, состоящую из m строк и n столбцов, будем называть $m \times n$-матрицей и обозначать $A_{m \times n}$ или $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Здесь индекс i указывает номер строки, j — номер столбца.

Матрица размера $m \times 1$ вида

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

состоит из одного столбца и называется *вектором-столбцом*, а числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ — его координатами. Матрица размера $1 \times n$ состоит из одной строки и представляет собой *вектор-строку* $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

В дальнейшем вектор-строку и вектор-столбец, как и векторы из $\mathbf{R}^n$, будем обозначать

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T.$$

Пример 1.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — прямоугольная матрица размера 4×3;

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ — квадратная матрица третьего порядка;

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ — вектор-столбец;

$(5, -1, 4, 3)$ — вектор-строка.

В случае квадратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ*, а элементы $a_{n1}, a_{n-1,\,2}, \dots, a_{1n}$ — *побочную диагональ* матрицы. Квадратная мат-

рица, у которой все элементы $a_{ij} = 0$, называется *нулевой матрицей*. Квадратная матрица вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

называется *диагональной* и обозначается $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Если в ней $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$, то матрица называется *скалярной*. При $\lambda = 1$ скалярная матрица называется *единичной* и обозначается

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Квадратные матрицы A и B вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

называются *верхней треугольной* и *нижней треугольной матрицей* соответственно.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля, называется *трапециевидной*.

Понятие равенства определяется только для матриц одинакового размера. Две $m \times n$-матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. В этом случае имеет место матричное равенство $A = B$.

Пример 2.

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 5, \ a_{12} = 4, \ a_{13} = 3; \\ a_{21} = 6, \ a_{22} = 0, \ a_{23} = 2; \\ a_{31} = 9, \ a_{32} = 1, \ a_{33} = 8. \end{cases}$$

Линейные операции над матрицами. Для сложения двух матриц необходимо, чтобы эти матрицы имели одинаковые размеры. *Суммой* двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ называется матрица $C = [c_{ij}]$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Сумма матриц A и B обозначается $A + B$.

Пример 3. Если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ то } A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1°. $A + B = B + A$ (свойство коммутативности).

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (свойство ассоциативности).

3°. Для любых двух матриц A и B (одинакового размера!) всегда существует единственная матрица X, такая, что $A + X = B$. Матрица X обозначается $X = B - A$ и называется *разностью матриц* B и A. Уравнение $A + X = 0$ имеет решение $X = 0 - A$, которое называется матрицей, *противоположной* A, и обозначается $-A$. Очевидно, $-A = [-a_{ij}]$.

Справедливость свойств 1° — 3° очевидна.

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ *на число* $\alpha \in \mathbf{R}$ называется матрица $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 4. При $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $\alpha = 5$ имеем

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 10 & -25 & 0 \\ 15 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Умножение матриц A и B на действительные числа α и β обладает следующими очевидными свойствами:

1°. $1 \cdot A = A$, $(-1)A = -A$, $0 \cdot A = O$, причем в последнем равенстве слева 0 — число, а справа O — нулевая матрица.

2°. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ — ассоциативность.

3°. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — дистрибутивность относительно чисел.

4°. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ — дистрибутивность относительно матриц.

Множество матриц одинакового размера $m \times n$ обозначим $\mathbf{M}^{mn}$. Тогда введенные на этом множестве операции сложения матриц и умножения матрицы на число в силу перечисленных выше свойств превращают множество $\mathbf{M}^{mn}$ в линейное пространство, векторами которого являются $m \times n$-матрицы.

Умножение матрицы на вектор. В дальнейшем, если не оговорено особо, под вектором понимается вектор-столбец.

Для умножения $m \times n$-матрицы A на вектор-столбец $\mathbf{x}$ необходимо, чтобы число столбцов n матрицы A было равно числу координат вектора $\mathbf{x}$. Тогда *произведение матрицы* A *на вектор* $\mathbf{x}$ обозначается $A\mathbf{x}$ и записывается по определению в виде

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \tag{1.109}$$

В результате получаем вектор-столбец $A\mathbf{x}$, имеющий столько координат, сколько строк у матрицы A. Заметим, что для записи

i-й координаты вектора Ax можно использовать символ суммы: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Таким образом, если обозначить $y = Ax$, то из соотношения (1.109) получим

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}. \tag{1.110}$$

Пример 5. Пусть $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, тогда $Ax = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-2) + (-1)\cdot 1 + 4\cdot 3 \\ 2(-2) + 0\cdot 1 + 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что вектор Ax можно представить в виде $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}(-2) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot 1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot 3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, т. е. *вектор Ax равен линейной комбинации столбцов матрицы, а коэффициентами этой комбинации являются соответствующие координаты вектора* x.

В общем случае из соотношений (1.109) и (1.110) имеем

$$y = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} x_j. \tag{1.111}$$

Отсюда видно, что если $x = 0$ — нулевой вектор-столбец, то $Ax = 0$. Далее, если $A = E$, где E — единичная матрица, то

$$Ex = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x.$$

Рассмотренная выше операция умножения матрицы на вектор обладает следующими очевидными линейными свойствами:

1°. $A(\alpha x) = \alpha Ax$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall x \in V$, $\forall x^1$, $x^2 \in V$.

2°. $A(x^1 + x^2) = Ax^1 + Ax^2$, $\forall x^1$, $x^2 \in V$.

Умножение матриц. Матрицы A и B назовем *согласованными*, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведение AB матриц A и B определяется только для согласованных матриц.

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix} —$$

$(m \times n)$- и $(n \times k)$-матрицы соответственно. *Произведением матрицы A на матрицу B* называется $m \times k$-матрица $C = AB$, j-й столбец которой равен

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.112}$$

Отсюда и из формулы (1.109) получаем, что элемент c_{ij} матрицы AB равен

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$j = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.113}$$

Таким образом, *элемент c_{ij} i-й строки и j-го столбца матрицы $C = AB$ равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.*

Пример 6. Перемножить матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя определение и равенство (1.113), получаем

$$AB = \begin{bmatrix} 1(-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2(-9) \\ -3(-1) + 4 \cdot 1 & -3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & -3 \cdot 3 + 4(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -15 \\ 7 & 8 & -45 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что произведение AB часто называется произведением матрицы A на матрицу B справа или произведением матрицы B на A слева.

Произведение матриц в общем случае не обладает свойством коммутативности, т. е. не всегда $AB = BA$. Это видно хотя бы из того, что из согласованности матрицы A с B, вообще говоря, не следует согласованность матрицы B с A. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *коммутативными*.

Пример 7. Матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, очевидно, согласованы, но $AB \neq BA$, так как $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Заметим, что произведение двух ненулевых матриц в этом произведении оказалось нулевой матрицей.

Из определения произведения матриц следует, что

$$AE = EA = A, \quad A \cdot O = O \cdot A = O.$$

Если матрица A согласована с матрицей B, а матрица B согласована с матрицей C, то под произведением ABC этих матриц понимается матрица, полученная последовательным умножением данных матриц, т. е. $ABC = (AB)C$. Если A — квадратная матрица, то *n-й степенью матрицы A* называется произведение $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$, составленное из n сомножителей A и обозначаемое $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$.

Из формул (1.112), (1.113) вытекают следующие свойства произведения матриц:

1°. $(AB)C = A(BC)$ (свойство ассоциативности).

2°. $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$ (свойство дистрибутивности).

Транспонирование матриц. Матрица A^T, получаемая из данной матрицы A путем замены строк на столбцы, и наоборот, называется *транспонированной*. Если обозначить элементы транспонированной матрицы A^T через a_{ij}^T, то, по определению,

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ij}^T] = [a_{ji}]. \tag{1.114}$$

Пример 8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка, и наоборот,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{1.115}$$

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1^\circ.\ (A^T)^T = A. \\ &2^\circ.\ (\alpha A)^T = \alpha A^T,\ \alpha \in \mathbf{R}. \\ &3^\circ.\ (A+B)^T = A^T + B^T. \\ &4^\circ.\ (AB)^T = B^T A^T. \end{aligned} \tag{1.116}$$

Свойства 1° — 3° очевидны. Докажем свойство 4°. Из формул (1.113) и (1.114) с учетом свойства 3° последовательно выводим

$$(AB)^T = \left[\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}\right]^T = \left[\sum_{s=1}^{n} (a_{is} b_{sj})^T\right] = \left[\sum_{s=1}^{n} a_{si} b_{js}\right] =$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n} b_{js} a_{si}\right] = B^T A^T,$$

поскольку $B^T = [b_{js}] = [b_{sj}^T]$, $A^T = [a_{si}] = [a_{is}^T]$.

Если $A = A^T$, то матрица A называется *симметричной*. Таковой, например, является матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & a_{22} & 5 & 0 \\ 2 & 5 & a_{33} & 4 \\ -3 & 0 & 4 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \forall a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}.$$

Очевидно, что симметричными могут быть только квадратные матрицы.

Матрица A, для которой $A^T = -A$, называется *кососимметрич-*

ной. Нетрудно видеть, что у кососимметричной матрицы все элементы главной диагонали равны нулю (почему?). Например, матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ — кососимметричная.}$$

Задачи и упражнения.

1. Доказать свойства 1° и 2° для произведения матриц.
2. Доказать равенство $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.
3. Пусть $A = \operatorname{diag}(a, a, \ldots, a)$ — скалярная матрица, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец. Доказать, что $A\mathbf{x} = a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)^T$.
4. Вычислить AB, BC, ABC, $(BC)^T$, $C^T B^T$, если

$$A = (1, 2, 1); \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ — векторы-столбцы. Найти $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$.

1.9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

Понятие линейного оператора. Пусть V и W — два линейных пространства. Отображение $\mathbf{A}: V \to W$ называется *линейным оператором*, если

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{x}^2) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{A}\mathbf{x}^2, \quad \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{1.117}$$

Из определения линейного оператора следует более общее соотношение, которому он удовлетворяет:

$$\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}^n) = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{A}\mathbf{x}^n,$$
$$\forall \mathbf{x}^i \in V, \ \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.118}$$

Вектор $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ называется *образом вектора* $\mathbf{x} \in V$.

Оператор, который каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ ставит в соответствие нулевой вектор $\mathbf{0} \in W$, является, очевидно, линейным и называется *нулевым оператором*. Нулевой оператор обозначается символом $\mathbf{O}$. Таким образом, $\mathbf{O}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

Линейный оператор $\mathbf{A}$, для которого $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, называется *тождественным* и обозначается $\mathbf{E}$.

Оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий соотношению $\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ для некоторого фиксированного $\alpha \in \mathbf{R}$, называется *скалярным оператором* или *оператором подобия*. При $\alpha = -1$ оператор $-\mathbf{A}$ называется *противоположным* оператору $\mathbf{A}$. Очевидно, при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ скалярный оператор превращается в нулевой и тождественный соответственно.

Областью значений линейного оператора $\mathbf{A}: V \to W$ называется множество векторов вида $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, и обозначается $\operatorname{im}\mathbf{A}$.

Таким образом,

$$\operatorname{im}\mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in W \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \ \forall \mathbf{x} \in V\}. \tag{1.119}$$

Ядром линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество $\ker \mathbf{A}$ всех $x \in V$, для которых $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ (англ. kernel — ядро):

$$\ker \mathbf{A} = \{x \in V \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}. \tag{1.120}$$

Легко убедиться, что область значений $\operatorname{im} \mathbf{A}$ (англ. image — образ) линейного оператора $\mathbf{A}: V \to W$ является подпространством пространства W, а ядро $\ker \mathbf{A}$ — подпространством пространства V. В самом деле, если $\mathbf{y}^1 = \mathbf{Ax}^1$ и $\mathbf{y}^2 = \mathbf{Ax}^2$, то в силу формулы (1.117) вектор $\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2) = \alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2$ принадлежит, очевидно, $\operatorname{im} \mathbf{A}$. Аналогично показывается, что $\ker \mathbf{A}$ — подпространство пространства V.

Размерность области значений $\operatorname{im} \mathbf{A}$ линейного оператора называется *рангом оператора* и обозначается $\dim(\operatorname{im} \mathbf{A})$, а размерность ядра $\ker \mathbf{A}$ называется *дефектом оператора* и обозначается $\dim(\ker \mathbf{A})$.

Матрица линейного оператора в заданном базисе. Пусть V — линейное пространство с базисом $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$, а $\mathbf{A}$ — линейный оператор, действующий из V в линейное пространство W размерности m, базисом которого служат векторы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^m$. Тогда любой вектор $x \in V$ представим в виде $x = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n$. В силу линейности оператора $\mathbf{A}$ получаем

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{u}^j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{Au}^j. \tag{1.121}$$

Векторы $\mathbf{Au}^j \in W$, $j = 1, 2, \ldots, n$, однозначно разлагаются по векторам базиса пространства W:

$$\mathbf{Au}^j = a_{1j}\mathbf{v}^1 + a_{2j}\mathbf{v}^2 + \ldots + a_{mj}\mathbf{v}^m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{v}^i, \tag{1.122}$$

где $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ — координаты вектора $\mathbf{Au}^j \in W$. Так как вектор $\mathbf{Ax}$ тоже принадлежит W, то аналогично

$$\mathbf{Ax} = y_1\mathbf{v}^1 + y_2\mathbf{v}^2 + \ldots + y_m\mathbf{v}^m = \sum_{i=1}^{m} y_i\mathbf{v}^i, \tag{1.123}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — координаты вектора $\mathbf{Ax} \in W$. Из формул (1.121)—(1.123) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\mathbf{v}^i = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{v}^i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathbf{v}^i,$$

откуда, приравняв координаты при соответствующих векторах $\mathbf{v}^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, получим систему из m равенств вида

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{1.124}$$

Равенства (1.124) представляют собой формулы для вычисления координат $y_1, y_2, \ldots, y_m$ вектора $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ при линейном отображении $\mathbf{A}: V \to W$ через координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $x \in V$.

Из равенств (1.124) следует, что при заданных базисах $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ в пространстве V и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^m$ в пространстве W линейный оператор $\mathbf{A}: V \to W$ полностью определяется матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.125}$$

которая называется *матрицей линейного оператора* $\mathbf{A}$ в выбранных базисах.

Столбцами матрицы A, как следует из равенств (1.122) и (1.125), служат координаты векторов $\mathbf{Au}^1, \mathbf{Au}^2, \ldots, \mathbf{Au}^n$ в базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^m$ пространства W. Строки этой матрицы образуют коэффициенты разложения (1.124) координат вектора $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ по координатам вектора $\mathbf{x}$. В силу единственности разложений векторов по базису матрица A линейного оператора $\mathbf{A}$ при фиксированных базисах пространств V и W определяется однозначно. Поскольку умножение матрицы на вектор обладает линейными свойствами, то любую прямоугольную матрицу можно рассматривать как матрицу некоторого линейного оператора.

Таким образом, между множествами матриц и линейных операторов устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

В силу этого соответствия операторы и их матрицы будем обозначать одними и теми же буквами, т. е. если $\mathbf{A}$ — оператор, то A — его матрица.

Таким образом, равенство $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ в координатной форме имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax. \tag{1.126}$$

Еще раз отметим, что формула (1.126) устанавливает связь между координатами вектора $\mathbf{x} \in V$ и координатами его образа $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \in W$.

Из равенств (1.126) и (1.111) следует, что область значений $\operatorname{im}\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$ совпадает с линейной оболочкой L, порожденной векторами-столбцами матрицы A. Следовательно, ранг линейного оператора равен числу линейно-независимых векторов-столбцов его матрицы.

Если пространство W совпадает с пространством V, то матрица линейного оператора $\mathbf{A}: V \to V$ (очевидно, квадратная порядка n) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

в некотором выбранном базисе $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, ..., $\mathbf{u}^n$. Столбцами ее являются координаты векторов $A\mathbf{u}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, в этом базисе.

Примеры линейных операторов и их матриц. Если $\mathbf{A}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ или $\mathbf{A}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ — линейные операторы, действующие в пространствах $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$, то их матрицы имеют вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

соответственно. Эти операторы переводят векторы из $\mathbf{R}^2$ в векторы из $\mathbf{R}^2$ или векторы из $\mathbf{R}^3$ в векторы того же пространства $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $\mathbf{A}$ — оператор подобия, отображающий вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ в некоторый параллельный ему вектор $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$. Линейность этого оператора очевидна.

Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — базис пространства $\mathbf{R}^3$, то

$$\mathbf{Ai} = \alpha\mathbf{i} = \alpha\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (\alpha, 0, 0)^T;$$
$$\mathbf{Aj} = \alpha\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0, \alpha, 0)^T;$$
$$\mathbf{Ak} = \alpha\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} = (0, 0, \alpha)^T,$$

и, значит, матрица этого оператора

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

При $\alpha = 1$ получаем матрицу E тождественного оператора, при $\alpha = -1$ — матрицу $-E$ оператора, противоположного тождественному, при $\alpha = 0$ — матрицу нулевого оператора.

При $\alpha \neq 0$ областью значений оператора подобия является, очевидно, все пространство $\mathbf{R}^3$, а ядром — нулевой вектор, так как только этот вектор удовлетворяет при преобразовании подобия равенству $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Ясно, что ранг оператора подобия $\dim(\operatorname{im} \mathbf{A}) = 3$, а его дефект $\dim(\ker \mathbf{A}) = 0$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{A}$ — поворот векторов плоскости $\mathbf{R}^2$ вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки. Это преобразование линейно, так как если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сложить и затем повернуть их сумму $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ на угол φ, то получим тот же результат, если оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ повернуть сначала на угол φ, а затем их сложить. Аналогично, не имеет значения, умножить ли вектор $\mathbf{a}$ на число α, а затем повернуть его на угол φ, или сделать это в обратном порядке.

Найдем матрицу оператора поворота. Для этого обратимся к рис. 1.30, из которого видно, что

$$\mathbf{Ai} = \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\mathbf{j} = \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j};$$

$$\mathbf{Aj} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \cos\varphi \cdot \mathbf{j} = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi \cdot \mathbf{j},$$

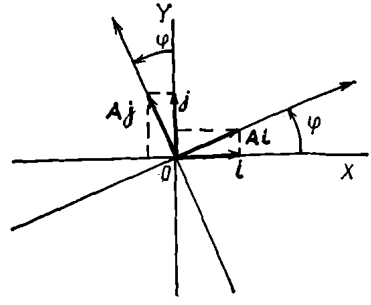


Рис. 1.30

так что искомая матрица оператора поворота в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (1.127)$$

Используя матрицу (1.127), получим формулы преобразования координат вектора на плоскости при повороте ее на угол φ — так называемые *формулы преобразования поворота*. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ — вектор на плоскости, тогда координаты y_1, y_2 вектора $A\mathbf{x}$ при повороте плоскости на угол φ определяются из соотношений

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2; \\ y_2 = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2. \end{cases} \quad (1.128)$$

Ясно, что областью значений оператора поворота является вся плоскость $\mathbf{R}^2$, а ядром — нулевой вектор, т. е. $\dim(\operatorname{im} \mathbf{A}) = 2$, $\dim(\ker \mathbf{A}) = 0$.

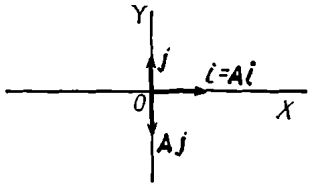


Рис. 1.31

Пример 3. Пусть $\mathbf{A}$ — зеркальное отражение (симметрия) векторов плоскости $\mathbf{R}^2$ относительно оси X. Линейность такого преобразования очевидна. Из рис. 1.31 следует, что $\mathbf{Ai} = \mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{Aj} = -\mathbf{j} = 0 \cdot \mathbf{i} - 1 \cdot \mathbf{j}$, поэтому матрица данного оператора есть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $\mathbf{A}$ — зеркальное отражение векторов пространства $\mathbf{R}^3$ относительно плоскости XY. При этом $\mathbf{Ai} = \mathbf{i}$, $\mathbf{Aj} = \mathbf{j}$, $\mathbf{Ak} = -\mathbf{k}$, так что матрица искомого оператора имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{im} \mathbf{A} = \mathbf{R}^3$, а $\ker \mathbf{A} = \{0\}$.

Пример 5. Пусть $\mathbf{A}$ — *ортогональное проектирование* векторов пространства $\mathbf{R}^3$ на плоскость XY. Линейность этого отображения следует из линейных свойств проекций векторов. Так как при этом имеем $\mathbf{Ai} = \mathbf{i}$, $\mathbf{Aj} = \mathbf{j}$, $\mathbf{Ak} = 0$, то матрица данного оператора

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, в этом случае областью значений оператора является плоскость XY, а ядром его служат все векторы, перпендикулярные к этой плоскости, так что $\dim(\operatorname{im} \mathbf{A}) = 2$, $\dim(\ker \mathbf{A}) = 1$.

Пример 6. Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ — линейный оператор, для которого $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T. \quad (1.129)$$

Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$.

Решение. Согласно условию, матрица A имеет две строки и три столбца:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

По определению,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{Ai} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{Aj} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \mathbf{Ak} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

так что

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в данном примере матрицу A проще получить, если воспользоваться тем, что ее строки составлены из коэффициентов разложения координат вектора y по координатам вектора x, т. е. из векторного равенства (1.129) следует, что

$$\begin{cases} y_1 = 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \Rightarrow a_{11} = 1,\ a_{12} = -1,\ a_{13} = 0; \\ y_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \Rightarrow a_{21} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{23} = 2. \end{cases}$$

Действия над линейными операторами. В множестве линейных операторов, действующих из V в W, определим операции суммы операторов и умножения оператора на число.

Суммой линейных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, определяемый равенством $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

Произведением линейного оператора $\mathbf{A}$ *на число* α называется оператор $\alpha\mathbf{A}$, определяемый равенством $(\alpha\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

Линейность операторов $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\alpha\mathbf{A}$ очевидна.

Операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, действующие из V в W в заданных базисах, имеют матрицы A и B одинаковых размеров. Учитывая равенство (1.126), получаем матричные равенства $(A + B)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}$; $(\alpha A)(\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x})$ для суммы операторов и произведения оператора на число, т. е. *матрицей суммы операторов является сумма матриц этих операторов, а матрицей произведения оператора на число является произведение матрицы оператора на это число.*

Пусть U, V и W — три линейных пространства размерностей k, n и m соответственно. Произведением или композицией двух линейных операторов $\mathbf{A}: V \to W$ и $\mathbf{B}: U \to V$ называется оператор $\mathbf{C}: U \to W$, обозначаемый $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, такой, что

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{AB})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in U. \tag{1.130}$$

Таким образом, произведение операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ состоит в последовательном выполнении преобразований $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, т. е. сначала на вектор $\mathbf{x}$ действует оператор $\mathbf{B}$, а затем на полученный результат действует оператор $\mathbf{A}$.

Линейность оператора $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ вытекает из следующего равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2) &= (\mathbf{AB})(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2) = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2)] = \\ &= \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{B}\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{B}\mathbf{x}^2) = \alpha_1\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}^1) + \alpha_2\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}^2) = \\ &= \alpha_1(\mathbf{AB})\mathbf{x}^1 + \alpha_2(\mathbf{AB})\mathbf{x}^2 = \alpha_1\mathbf{C}\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{C}\mathbf{x}^2. \end{aligned}$$

Покажем, что *матрица произведения линейных операторов равна произведению матриц этих операторов.* В самом деле, пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k$ — базис пространства U, $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ — базис пространства V, а $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \ldots, \mathbf{w}^m$ — базис пространства W. Тогда, согласно равенству (1.122),

$$(\mathbf{AB})\mathbf{u}^j = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u}^j) = \mathbf{A}\left(\sum_{s=1}^{n} b_{sj}\mathbf{v}^s\right) = \sum_{s=1}^{n} b_{sj}\mathbf{A}\mathbf{v}^s = \sum_{s=1}^{n} b_{sj}\sum_{i=1}^{m} a_{is}\mathbf{w}^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n} b_{sj}a_{is}\right)\mathbf{w}^i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\right)\mathbf{w}^i,$$

откуда по формуле (1.113) следует справедливость сформулированного выше утверждения.

Заметим, что, вообще говоря, как и для матриц, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Пример 7. Из геометрических соображений ясно, что последовательное выполнение двух поворотов плоскости $\mathbf{R}^2$ на углы φ и ψ равносильно одному повороту ее на угол $\varphi + \psi$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — операторы поворота на угол φ и ψ соответственно, а

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} -$$

их матрицы. Тогда поворот на угол $\varphi + \psi$ осуществляет оператор с матрицей

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{bmatrix},$$

откуда следует, что результирующий поворот осуществлен на угол $\varphi + \psi$.

Справедливы следующие свойства линейных операторов:

1°. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. 2°. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
3°. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$. 4°. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
5°. $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$. 6°. $(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$, $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.
7°. $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}$. 8°. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
9°. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. 10°. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Справедливость свойств 1°—6° очевидна. Докажем свойство 10°. Действительно, по определению произведения линейных операторов:

$$[\mathbf{A}(\mathbf{BC})](\mathbf{x}) = \mathbf{A}[(\mathbf{BC})\mathbf{x}] = \mathbf{A}[(\mathbf{B}(\mathbf{Cx})];$$

$$[(\mathbf{AB})\mathbf{C}](\mathbf{x}) = (\mathbf{AB})(\mathbf{Cx}) = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{Cx})],$$

откуда и следует справедливость свойства 10°.

Свойства 7°—9° доказываются аналогично.

Обратный оператор. Линейный оператор $\mathbf{A}$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т. е. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = 0$, в противном случае оператор называется *вырожденным*, т. е. для вырожденного оператора равенство $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ возможно и при некотором $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Оператор проектирования примера 5, очевидно, является вырожденным, так как он переводит ненулевые векторы, ортогональные плоскости XY, в нулевой вектор. Невырожденными являются, например, операторы подобия и поворота.

Из определения невырожденного оператора следует, что его дефект равен нулю, т. е. $\dim(\ker \mathbf{A}) = 0$.

Важнейшим свойством невырожденного оператора является взаимная однозначность отображения, осуществляемого им, т. е. если $\mathbf{y}^1 \neq \mathbf{y}^2$, где $\mathbf{y}^1 = \mathbf{Ax}^1$, $\mathbf{y}^2 = \mathbf{Ax}^2$ для некоторых $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, то $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$. В самом деле, предположим, что для некоторого $\mathbf{y}$ существуют два прообраза $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, т. е. $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}^1$ и $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}^2$. Отсюда $\mathbf{A}(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) = \mathbf{0}$, что в силу невырожденности оператора $\mathbf{A}$ означает $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$ или $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2$.

Итак, если $\mathbf{A}$ — невырожденный оператор, то для каждого $\mathbf{y} \in W$ существует единственный $\mathbf{x} \in V$, такой, что $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Оператор, определяющий вектор $\mathbf{x}$ для данного $\mathbf{y}$ из соотношения $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, называется *обратным* оператору $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Таким образом, исходя из определения обратного оператора имеем

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\,\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \tag{1.131}$$

Аналогично

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in W. \tag{1.132}$$

Из этих равенств видно, что

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}, \tag{1.133}$$

где $\mathbf{E}$ — тождественный оператор.

Заметим, что определение обратного оператора соответствует определению обратной функции, приведенной в § 1.2, и соотношения (1.131) и (1.132) вполне идентичны соотношениям (1.4) и (1.5) соответственно.

Докажем линейность обратного оператора. Пусть $\mathbf{y}^1$ и $\mathbf{y}^2$ — произвольные векторы из W и $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — отвечающие им единственные векторы из V, для которых $\mathbf{y}^1 = \mathbf{A}\mathbf{x}^1$, $\mathbf{y}^2 = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$. Тогда, учитывая линейность оператора $\mathbf{A}$, получим

$$\mathbf{A}^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2) = \mathbf{A}^{-1}(\alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{x}^2) = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2)] =$$
$$= (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2) = \alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2 = \alpha_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}^2.$$

Легко проверить, что если линейные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ невырожденные, то и их произведение $\mathbf{AB}$ является невырожденным оператором, обратным для которого служит $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, т. е.

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.134}$$

Это следует из равенства

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})] = \mathbf{A}[(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1}] = \mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} =$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ — фиксированный базис пространства V. Тогда в этом базисе линейным операторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ соответствуют единственные квадратные матрицы A и A^{-1} порядка n, которые, согласно равенствам (1.133), удовлетворяют соотношению

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица порядка n.

Матрица A^{-1}, определенная равенством (1.134), называется *обратной* для матрицы A. Ее структура будет подробно изучена несколько позже.

Задачи и упражнения.

1. Доказать, что ядро линейного оператора $\mathbf{A}: V \to W$ является подпространством линейного пространства V.

2. Пусть заданы координаты вектора $\mathbf{x}$ в некотором базисе. Выяснить, является ли оператор $\mathbf{A}$ линейным, и в случае линейности построить его матрицу:

а) $\mathbf{A}\mathbf{x} = (2x_1 - x_3,\ x_3,\ x_1 - x_2)^T$, $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T$;

б) $\mathbf{A}\mathbf{x} = (x_1 + 2,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T$, $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T$;

в) $\mathbf{Ax} = \left(x_1^2,\ x_1 \cdot x_2\right)^T$, $\mathbf{x} = \left(x_1,\ x_2\right)^T$;

г) $\mathbf{Ax} = (\mathbf{x},\ \mathbf{a})\,\mathbf{a}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор.

3. Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, для которого

$$y_1 = x_2,\ y_2 = x_1,\ y_3 = x_1 - x_2.$$

4. Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ — линейный оператор с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти $\ker \mathbf{A}$ и $\operatorname{im} \mathbf{A}$.

Решение. По определению $\ker \mathbf{A} = \left\{(x_1,\ x_2,\ x_3)^T = \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\right\}$. Отсюда

$$(\mathbf{Ax} = \mathbf{0}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

т. е. $\ker \mathbf{A}$ есть множество векторов $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, координаты которых удовлетворяют системе $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. Решим ее. Из первого уравнения находим, что $x_1 = -x_2$, а из второго — $x_2 = -x_3$. Таким образом, $x_1 = x_3$, $x_2 = -x_3$, т. е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_3 — произвольное действительное число. Следовательно, $\ker \mathbf{A}$ есть множество векторов, коллинеарных вектору $(1, -1, 1)^T$.

Далее, по определению, $\operatorname{im} \mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{y} = \mathbf{Ax},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3\}$, т. е.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{y} \in \operatorname{im} \mathbf{A}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}^1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{u}^2 = (1,\ 1,\ 0)$ и $\mathbf{u}^3 = (0,\ 1,\ 0)$ с коэффициентами $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbf{R}$. Но $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^3$, поэтому любой вектор $\mathbf{y} \in \operatorname{im} \mathbf{A}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^3$, т. е. $\operatorname{im} \mathbf{A}$ совпадает с множеством векторов, лежащих в плоскости, порожденной векторами $\mathbf{u}^1 = (1,\ 0,\ 0)^T$ и $\mathbf{u}^3 = (0,\ 1,\ 0)^T$.

5. Доказать, что линейный оператор $\mathbf{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, для которого $\mathbf{Ax} = (x_3,\ x_1,\ x_2)$, $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, является взаимно-однозначным.

6. Найти матрицу оператора проектирования пространства $\mathbf{R}^3$ на прямую $x = y = z$.

1.10. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сопряженные операторы и их матрицы. Изучим дополнительные свойства линейных операторов, связанные с понятием ортогональности в евклидовом пространстве. Вначале докажем следующее утверждение: если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы, действующие в n-мерном евклидовом пространстве V, и $(\mathbf{x},\ \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{By})$, $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V$, то $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

В самом деле, положив в равенстве $((\mathbf{x},\ (\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{y}) = 0) \Leftrightarrow ((\mathbf{x},\ \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{By}))$ вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{y}$, получим $((\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{y},\ (\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{y}) = \|(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{y}\|^2 = 0$, $\forall \mathbf{y} \in V$, что равносильно равенству $(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{y} \in V$, т. е. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = 0$ или $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Введем следующее определение. Линейный оператор $\mathbf{A}^*$ называется *сопряженным* оператору $\mathbf{A}$, если

$$(\mathbf{Ax},\ \mathbf{y}) = (\mathbf{x},\ \mathbf{A}^*\mathbf{y}),\ \forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V. \tag{1.135}$$

Естественно возникает вопрос: существует ли для данного оператора $\mathbf{A}$ сопряженный?

Теорема 1.14. Каждый линейный оператор $\mathbf{A}$ имеет единственный сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$.

Доказательство. Выберем в пространстве V ортонормированный базис $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$. Каждому линейному оператору $\mathbf{A}: V \to V$ в этом базисе отвечает матрица $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть A^T — матрица, транспонированная к A. Ей соответствует линейный оператор $\mathbf{B}$. Тогда, согласно равенству (1.122),

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i) = (a_{1j}\mathbf{u}^1 + a_{2j}\mathbf{u}^2 + \ldots + a_{nj}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^i) = a_{ij}$$

и

$$(\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\mathbf{u}^i) = (\mathbf{u}^j, a_{i1}\mathbf{u}^1 + a_{i2}\mathbf{u}^2 + \ldots + a_{in}\mathbf{u}^n) = a_{ij},$$

откуда

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i) = (\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\mathbf{u}^i), \tag{1.136}$$

т. е. соотношение (1.135) для базисных векторов выполнено.

Пусть далее $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}^1 + y_2\mathbf{u}^2 + \ldots + y_n\mathbf{u}^n$ — любые два вектора из V. Рассмотрим скалярные произведения $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y})$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{A}\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{u}^j, \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{u}^i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j y_i (\mathbf{A}\mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i),$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y}) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{u}^i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j y_i (\mathbf{u}^j, \mathbf{B}\mathbf{u}^i).$$

Сравнивая эти выражения с учетом равенства (1.136) и отмеченного выше свойства, получаем равенство $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, т. е. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$.

Таким образом, доказано, что для каждого линейного оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном евклидовом пространстве существует сопряженный ему оператор $\mathbf{A}^*$, матрица которого в любом ортонормированном базисе является транспонированной к матрице оператора $\mathbf{A}$. Единственность оператора $\mathbf{A}^*$ следует из определения сопряженного оператора и доказанного выше утверждения. ■

Легко убедиться в том, что оператор $\mathbf{A}^*$, сопряженный линейному оператору $\mathbf{A}$, является линейным. В самом деле, для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in V$ и любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ в силу формулы (1.135) имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2) = \alpha_1(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) + \alpha_2(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}^2) = \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}^1) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}^2) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2)).$$

Итак, оператор $\mathbf{A}^*$ линеен и ему соответствует матрица A^T. Поэтому соответствующее формуле (1.135) матричное соотношение имеет вид

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^T\mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \tag{1.137}$$

Сопряженные операторы обладают следующими свойствами:

1°. $E^* = E$. 2°. $(A^*)^* = A$.
3°. $(A + B)^* = A^* + B^*$. 4°. $(\alpha A)^* = \alpha \cdot A^*$.
5°. $(AB)^* = B^*A^*$. 6°. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Справедливость свойств 1°—5° вытекает из свойств транспонирования матриц.

Убедимся в справедливости свойства 6°. Пусть A^{-1} существует. Тогда из равенства $AA^{-1} = E$ и свойств 1°, 5° вытекает, что $(AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^* = E^* = E$, т. е. что $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Отсюда получаем еще одно важное свойство транспонирования матриц:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}. \tag{1.138}$$

Пример 1. Пусть A — поворот евклидовой плоскости R^2 на угол φ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

в ортонормированном базисе. Тогда матрицей сопряженного оператора в этом базисе является

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, A^* — поворот плоскости на угол φ в противоположном направлении.

Самосопряженные операторы и симметричные матрицы. Линейный оператор A называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. если

$$(Ax, y) = (x, Ay), \ \forall x, y \in V. \tag{1.139}$$

Из этого определения и теоремы 1.14 следует, что в ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной: $A = A^T$, т. е. *матрицей самосопряженного оператора является симметричная матрица.*

Из свойств сопряженных операторов следует, что линейные операции над самосопряженными операторами приводят к самосопряженным операторам, а тождественный оператор E самосопряжен.

Выясним, при каком условии произведение самосопряженных операторов будет самосопряженным оператором. Будем говорить, что операторы A и B коммутируют, если $AB = BA$.

Теорема 1.15. Для того чтобы произведение самосопряженных операторов A и B было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно, чтобы они коммутировали.

Доказательство. В самом деле, пусть $A^* = A$ и $B^* = B$. Тогда $(AB)^* = B^*A^* = BA$, что равно AB, очевидно, в том и только в том случае, если операторы A и B коммутируют. ■

Примерами самосопряженных операторов могут служить, очевидно, операторы проектирования, зеркального отражения, подобия, так как матрицы их симметричны.

Ортогональный оператор и его матрица. В евклидовом пространстве важную роль играют ортогональные операторы.

Линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий в действительном n-мерном евклидовом пространстве V, называется *ортогональным*, если

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \tag{1.140}$$

Таким образом, *ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, а значит, он сохраняет длины векторов и углы между ними.* В частности, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — ортогональные векторы, то и $\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{Ay}$ — тоже ортогональные векторы.

Отсюда можно сделать вывод, что если $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ — ортонормированный базис евклидова пространства V, то и $\mathbf{Au}^1, \mathbf{Au}^2, \ldots, \mathbf{Au}^n$ тоже является ортонормированным базисом.

Верно и обратное: линейный оператор $\mathbf{A}$, переводящий один ортонормированный базис в другой ортонормированный базис, ортогонален. Действительно, пусть ортонормированный базис $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ оператором $\mathbf{A}$ переводится в ортонормированный базис $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$, т. е. $\mathbf{Au}^i = \mathbf{v}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда если $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}^1 + y_2\mathbf{u}^2 + \ldots + y_n\mathbf{u}^n$, то $\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{Au}^1 + x_2\mathbf{Au}^2 + \ldots + x_n\mathbf{Au}^n = x_1\mathbf{v}^1 + x_2\mathbf{v}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n$, и аналогично $\mathbf{Ay} = y_1\mathbf{v}^1 + y_2\mathbf{v}^2 + \ldots + y_n\mathbf{v}^n$. Отсюда $(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, так как в ортонормированном базисе скалярное произведение равно сумме произведений их одноименных координат.

Пусть $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор и $\mathbf{A}^*$ — ему сопряженный. Тогда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{Ay})) = (\mathbf{x}, (\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Значит, $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Совершенно аналогично можно убедиться, что и $\mathbf{AA}^* = \mathbf{E}$.

Таким образом, для ортогонального оператора имеет место равенство

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^* = \mathbf{E}. \tag{1.141}$$

Следовательно, если $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор, то сопряженный ему оператор $\mathbf{A}^*$ удовлетворяет равенству

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}. \tag{1.142}$$

Равенство (1.142) является необходимым и достаточным условием того, чтобы оператор $\mathbf{A}$ *был ортогональным.* Отсюда, в частности, следует, что ортогональный оператор всегда невырожден.

Перечислим простейшие свойства ортогонального оператора.

1°. Тождественный оператор $\mathbf{E}$ является ортогональным, так как из равенства $\mathbf{Ex} = \mathbf{x}$ и $\mathbf{Ey} = \mathbf{y}$ следует равенство $(\mathbf{Ex}, \mathbf{Ey}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

2°. Произведение ортогональных операторов является ортогональным оператором. Это следует из равенств

$$(\mathbf{ABx}, \mathbf{ABy}) = (\mathbf{A}(\mathbf{Bx}), \mathbf{A}(\mathbf{By})) = (\mathbf{Bx}, \mathbf{By}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — ортогональные операторы.

3°. Оператор, обратный ортогональному, является ортогональным оператором. В самом деле, если $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$, то в силу свойства 6° сопряженных операторов $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Другими словами, свойство 3° означает, что оператор $\mathbf{A}$ переводит произвольный ортонормированный базис $\mathbf{u}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ в ортонормированный базис $\mathbf{Au}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а оператор $\mathbf{A}^{-1}$ восстанавливает исходный ортонормированный базис.

4°. Если $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор, то произведение $\alpha\mathbf{A}$ будет ортогональным в том и только в том случае, если $\alpha = \pm 1$. Это следует из равенства $((\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{x},\ (\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{y}) = \alpha^2(\mathbf{Ax},\ \mathbf{Ay}) = \alpha^2(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$.

Выясним теперь структуру матрицы $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ортогонального оператора $\mathbf{A}$ в некотором ортонормированном базисе. Очевидно, соответствующие условиям (1.141) и (1.142) матричные равенства имеют вид

$$A^TA = AA^T = E; \tag{1.143}$$

$$A^T = A^{-1}. \tag{1.144}$$

Матрица A, для которой справедливо равенство (1.143) или (1.144), называется *ортогональной матрицей.*

Из матричного равенства (1.143) с учетом правила умножения матриц получаем

$$\begin{aligned} &a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ \ldots\ + a_{ni}a_{nj} = 0,\ i \neq j;\\ &a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ \ldots\ + a_{ni}^2 = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.145}$$

и

$$\begin{aligned} &a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ \ldots\ + a_{in}a_{jn} = 0,\ i \neq j;\\ &a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ \ldots\ + a_{in}^2 = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.146}$$

Таким образом, столбцы (строки) ортогональной матрицы, рассматриваемые как векторы-столбцы (векторы-строки), сами образуют ортонормированную систему.

Итак, в любом ортонормированном базисе матрица ортогонального преобразования является ортогональной.

Пример 2. Матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

является, очевидно, ортогональной, так как для ее элементов соотношения (1.145) или (1.146) имеют место.

В заключение выясним геометрический смысл ортогонального оператора в $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$.

В случае пространства $\mathbf{R}^1$ базисный вектор $\mathbf{e}$ ортогональным оператором $\mathbf{A}$ переводится в вектор $\mathbf{Ae} \in \mathbf{R}^1$. Следовательно, $\mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e}$, где $\lambda = \pm 1$, т. е. $\mathbf{Ae} = \pm\,\mathbf{e}$. А это означает, что $\mathbf{A}$ либо тождественный оператор ($\mathbf{Ae} = \mathbf{e}$), либо центральная симметрия ($\mathbf{Ae} = -\mathbf{e}$).

В пространстве $\mathbf{R}^2$ каждый ортогональный оператор в некотором ортонормированном базисе определяется ортогональной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно равенству (1.145), $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$; $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$; $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Первые два равенства означают что найдутся такие φ и ψ, что $a_{11} = \cos\varphi$; $a_{21} = \sin\varphi$; $a_{12} = \cos\psi$ и $a_{22} = \sin\psi$, а из третьего получаем, что $\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi - \psi) = 0$, откуда вытекает:

1) $\psi - \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ или 2) $\psi - \varphi = \dfrac{3}{2}\pi$.

В первом случае $a_{12} = \cos\psi = -\sin\varphi$; $a_{22} = \sin\psi = \cos\varphi$, и тогда

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = A_1,$$

т. е. $\mathbf{A}_1$ — *поворот на угол φ вокруг начала координат (тождественный оператор при $\varphi = 0$ и центральная симметрия относительно начала координат при $\varphi = \pi$).*

Во втором случае $a_{12} = \sin\varphi$, $a_{22} = -\cos\varphi$ и

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} = A_2.$$

Нетрудно видеть, что матрицу A_2 можно представить в виде произведения двух матриц, т. е.

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь левая матрица в правой части равенства — матрица поворота плоскости на угол φ, а вторая — матрица зеркального отражения относительно оси X. Таким образом, матрица A_2 есть матрица оператора, осуществляющего зеркальное отражение векторов относительно оси X с последующим поворотом их на угол φ вокруг начала координат.

Задачи и упражнения.

1. Найти оператор, сопряженный оператору:

а) $\mathbf{Ax} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\,\mathbf{a}$;

б) $\mathbf{Ax} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ и $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор из $\mathbf{R}^3$.

2. Пусть $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4, \mathbf{e}^5, \mathbf{e}^6$ — ортонормированный базис в $\mathbf{R}^6$. Доказать, что $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор, если $\mathbf{Ae}^1 = \mathbf{e}^1$; $\mathbf{Ae}^2 = -\mathbf{e}^2$; $\mathbf{Ae}^3 = \mathbf{e}^3\cos\alpha + \mathbf{e}^4\sin\alpha$; $\mathbf{Ae}^4 = -\mathbf{e}^3\sin\alpha + \mathbf{e}^4\cos\alpha$; $\mathbf{Ae}^5 = \mathbf{e}^5\cos\beta + \mathbf{e}^6\sin\beta$; $\mathbf{Ae}^6 = -\mathbf{e}^5\sin\beta + \mathbf{e}^6\cos\beta$.

3. Найти значения параметров a, b, c, при которых матрица A ортогональна:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & c \end{bmatrix}.$$

1.11. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Определители второго и третьего порядков. Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Пусть дана матрица второго порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Элементы ее определяют число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, которое называется *определителем (детерминантом) второго порядка* и записывается в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.147)$$

Из формулы (1.147) можно легко получить следующие свойства определителя.

1°. При транспонировании матрицы A^T ее определитель не меняется, т. е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = |A^T|.$$

2°. Знак определителя меняется на противоположный при перестановке строк или столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

3°. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

4°. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5°. Определитель равен нулю, если элементы его строк (столбцов) пропорциональны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

6°. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix}.$$

7°. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых, а у другого — из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пусть дана матрица третьего порядка

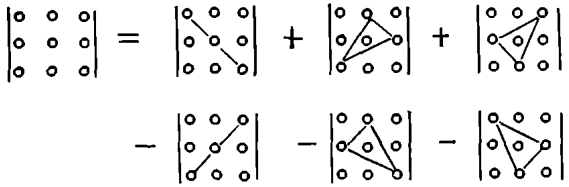
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ее элементы определяют число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \quad (1.148)$$

которое называется *определителем третьего порядка.*

Из формулы (1.148) замечаем, что определитель третьего порядка можно вычислять по *схеме Саррюса* (или по *правилу треугольников*).



Три положительных члена определителя в формуле (1.148) представляют собой произведения элементов главной диагонали a_{11}, a_{22}, a_{33} и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три его отрицательных члена представляют произведения элементов побочной диагонали a_{13}, a_{22}, a_{31} и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Пример 1. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

По правилу Саррюса находим

$$|A| = 1\,(-1)\,(-2) + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 2\,(-3) \cdot 1 - 2\,(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0\,(-3)\,(-2) = 0.$$

Из равенства (1.148) замечаем, что определитель третьего порядка состоит из $6 = 3!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение трех сомножителей (элементов определителя). Элементы произведения каждого слагаемого берутся по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца.

Установим теперь ряд свойств определителя третьего порядка.

1°. Величина определителя не изменится, если его строки заменить на соответствующие столбцы, т. е. $|A| = |A^T|$.

Для доказательства этого свойства достаточно расписать $|A|$ и $|A^T|$ по формуле (1.148) и убедиться в равенстве полученных выражений.

Свойство 1° устанавливает равноправие строк и столбцов определителя. Поэтому все дальнейшие свойства определителя будем формулировать и доказывать для строк, помня при этом, что аналогичное свойство имеет место и для столбцов.

2°. При перестановке двух строк определителя его знак меняется на противоположный.

Справедливость свойства вытекает из правила треугольников.

3°. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 3° очевидно.

4°. Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно выносить за знак определителя.

Справедливость этого свойства вытекает из того, что каждое слагаемое определителя в качестве сомножителя содержит один и только один элемент из каждой строки.

5°. Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.

В самом деле, поменяем местами эти строки. Тогда, с одной стороны, определитель не изменится, а с другой стороны, на основании свойства 2° он изменит знак на противоположный, т. е. $(|A| = -|A|) \Rightarrow (|A| = 0)$.

6°. Если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Действительно, в силу свойства 4° коэффициент пропорциональности можно вынести за знак определителя, при этом получим определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю по свойству 5°.

7°. Если каждый элемент i-й строки $(i = 1, 2, 3)$ определителя равен сумме двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых i-я строка составлена из первых слагаемых, а у другого — из вторых слагаемых, а в остальных строках те же элементы, что и у исходного определителя, т. е., например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства достаточно расписать определитель в обеих частях этого равенства по формуле (1.148), произвести соответствующую перегруппировку слагаемых слева и убедиться в равенстве обеих частей.

8°. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число k, то значение определителя не изменится.

В самом деле,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$$

на основании свойства 5°.

Миноры и алгебраические дополнения. В определителе (1.148) вычеркнем, например, 2-ю строку и 3-й столбец. Из оставшихся элементов образуем определитель второго порядка

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

который называется *минором элемента* a_{23}. Аналогично определяется минор M_{ij} любого элемента a_{ij}, i, $j = 1, 2, 3$, определителя $|A|$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.149}$$

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

Обратимся теперь к определителю (1.148) и преобразуем его к виду

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

В общем случае аналогично доказываются равенства:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.150}$$

Тем самым установлено следующее свойство определителя третьего порядка.

9°. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца).

Формулы (1.150) называются *формулами разложения определителя по элементам i-й строки (j-го столбца)* или *формулами Лапласа** для определителя третьего порядка.

Пример 2. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

* П. Лаплас (1749—1827) — французский математик.

Решение. Разложим определитель по третьему столбцу. Получим

$$|A| = (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -29.$$

Установим еще одно важное свойство определителя третьего порядка.

10°. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \qquad (1.151)$$

В самом деле, повторим, например, 1-ю и 3-ю строки определителя, т. е. рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив его по элементам третьей строки, получим равенство

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0.$$

Аналогично проверяются и остальные равенства из условия (1.151).

Перестановки и транспозиции. Рассмотрим множество чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Всевозможные расположения этих чисел называются *перестановкой*. Например, из множества $\{1, 2, 3\}$ можно составить следующие различные перестановки $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.

Перестановку из чисел $1, 2, \ldots, n$ будем обозначать $j = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — это числа $1, 2, \ldots, n$, взятые в определенном порядке.

Теорема 1.16. Для n чисел $1, 2, \ldots, n$ существует $n!$ различных перестановок.

Доказательство. В перестановке из n чисел для первого числа имеется n возможностей его расположения. Зафиксировав его положение, для второго числа имеем уже $n - 1$ возможностей для его расположения и т. д. Таким образом, всего имеется $n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ возможностей для расположения n чисел. ■

Если в перестановке $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ большее число стоит левее меньшего, то этот факт называется *инверсией* (беспорядком). Например, в перестановке $\{2, 3, 1\}$ две инверсии: число 2 стоит левее 1 и 3 стоит левее 1. Если перестановка имеет четное число инверсий, она называется *четной*, в противном случае она называется *нечетной*. Операция, меняющая местами два числа в перестановке, называется *транспозицией*.

Теорема 1.17. Транспозиция меняет четность перестановки на противоположную.

Доказательство. Рассмотрим перестановку

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_{l-1}, j_l, j_{l+1}, \ldots, j_n\}.$$

Пусть транспозиция меняет местами числа j_k и j_l, между которыми имеется m чисел. Прежде чем j_k попадет на место j_l, ему надо поменяться местами последовательно с $m+1$ числами j_{k+1}, $j_{k+2}, \ldots, j_{l-1}, j_l$. Число же j_l при движении влево поменяется местами m раз с числами $j_{l-1}, \ldots, j_{k+1}$. В итоге рядом стоящие в перестановке числа поменяются местами $2m+1$ раз. Но транспозиция двух рядом стоящих чисел, очевидно, меняет четность перестановки. А поскольку произошло $2m+1$ транспозиций, то, следовательно, четность перестановки изменилась на противоположную. ■

Определители n-го порядка. Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определителем n-го порядка матрицы A называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A. Знак каждого слагаемого определяется числом инверсий в перестановках, составленных из первых и вторых индексов сомножителей a_{ij}: если сумма числа инверсий четная, то слагаемое берется со знаком $+$, если она нечетная, то слагаемое берется со знаком $-$. Таким образом, по определению,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n \\ j_1, j_2, \ldots, j_n}} (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}, \quad (1.152)$$

где s — число инверсий в перестановке из первых индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а t — число инверсий в перестановке из вторых индексов $j_1, j_2, \ldots, j_n$, а суммирование распространяется на всевозможные перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и $j_1, j_2, \ldots, j_n$ из n чисел $1, 2, \ldots, n$.

Поменяв местами один элемент в произведении $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$, мы нарушим четность каждой из перестановок $i = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ и $j = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ на единицу, но их суммарная четность сохранится. Поэтому знак перед слагаемым в определителе не изменится, если так переставить сомножители в слагаемых, чтобы первые индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ располагались в виде $1, 2, \ldots, n$. Таким образом, определитель можно записать так:

$$|A| = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}, \quad (1.153)$$

где t — число инверсий в перестановке $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, а сумма рас-

пространяется на всевозможные перестановки $j_1, j_2 \ldots, j_n$. Число $(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ называется *элементом определителя.*

Определитель n-го порядка обладает свойствами, доказанными ранее для определителей третьего порядка.

1°. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы, т. е. $|A| = |A^T|$.

Доказательство. Упорядочив слагаемые в выражении (1.152) по второму индексу, получим, учитывая равенство (1.153), что

$$|A| = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (-1)^s a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (-1)^s a^T_{1i_1} a^T_{2i_2} \ldots a^T_{ni_n} = |A^T|,$$

где s — число инверсий в перестановке $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Из этого утверждения вытекает, что свойства, доказанные для строк определителя, будут верны и для столбцов. Следовательно, последующие свойства можно формулировать только для строк. ■

2°. Если одна из строк матрицы A нулевая, то $|A| = 0$.

Это следует из того, что в каждое слагаемое определителя по формуле (1.152) входит элемент нулевой строки в качестве сомножителя.

3°. Общий множитель какой-либо строки определителя можно вынести за знак определителя.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots ka_{mj_m} \ldots a_{nj_n} = k|A|. \blacksquare$$

4°. Если в определителе поменять местами две строки, то он изменит знак на противоположный.

Доказательство. Если поменять местами k-ю и l-ю строки, то в сумме (1.153) надо менять местами первые индексы k и l, вторые индексы j_k и j_l при этом останутся на своих местах. Тогда в силу теоремы 1.17 четность перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$ изменится на единицу, что приведет к изменению знака определителя на противоположный. ■

5°. Если в определителе две одинаковые строки, то он равен нулю.

6°. Если в определителе две строки пропорциональны, то он равен нулю.

Доказательства свойств 5° и 6° дословно повторяют доказательства аналогичных свойств для определителей третьего порядка.

7°. Если элементы некоторой k-й строки представлены в виде суммы двух слагаемых, т.е. она имеет вид $(a_{k1} + b_{k1}, a_{k2} + b_{k2}, \ldots, a_{kn} + b_{kn})$, то справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \ldots & a_{kn} + b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Согласно формуле (1.153), получим

$$|A| = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots (a_{nj_n} + b_{kj_k}) \ldots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} \ldots a_{kj_k} \ldots a_{nj_n} + \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} \ldots b_{kj_k} \ldots a_{nj_n}. \blacksquare$$

8°. Если элементы некоторой строки определителя являются линейными комбинациями соответствующих элементов других строк, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть k-я строка определителя является линейной комбинацией других строк. Разложим его на сумму определителей, согласно свойству 7°. Каждое слагаемое этой суммы по свойству 6° равно нулю в силу пропорциональности строк. ■

9°. Если к элементам некоторой строки определителя добавить соответствующие элементы другой строки, то определитель от этого не изменится.

Это свойство вытекает из свойств 7° и 8°.

Как и для определителя третьего порядка, справедливо следующее свойство, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.18. (Лапласа). Сумма всех произведений элементов любой строки определителя на соответствующие алгебраические дополнения равна этому определителю, т. е.

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj},$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.154)$$

Равенство (1.154) называется *формулой Лапласа*.

Пример 3. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Решение. Последовательно применяя формулу Лапласа, получим

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}.$$

Итак, определитель треугольной матрицы A равен произведению диагональных элементов.

10°. Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения другой строки равна нулю.

Суммируя произведения элементов одной строки на соответствующие алгебраические дополнения другой строки, мы вычисляем по сути дела определитель, у которого указанные строки одинаковы. Согласно свойству 5°, такой определитель равен нулю.

Определитель произведения матриц. Теорема 1.19. Определитель

произведения двух матриц A и B одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц, т. е.

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \tag{1.155}$$

Доказательство. Пусть $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ — матрицы порядка n. Согласно правилу умножения матриц, имеем $C = AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right]$. В силу равенства (1.153) определитель матрицы C

$$|C| = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t \left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 j_1}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} b_{k_2 j_2}\right) \ldots \left(\sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} b_{k_n j_n}\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} \left(\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t \, (a_{1k_1} b_{k_1 j_1})\,(a_{2k_2} b_{k_2 j_2}) \ldots (a_{nk_n} b_{k_n j_n})\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_1} b_{k_1 2} & \ldots & a_{1k_1} b_{k_1 n} \\ a_{2k_2} b_{k_2 1} & a_{2k_2} b_{k_2 2} & \ldots & a_{2k_2} b_{k_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nk_n} b_{k_n 1} & a_{nk_n} b_{k_n 2} & \ldots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{vmatrix} = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots$$

$$a_{nk_n} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & \ldots & b_{k_1 n} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & \ldots & b_{k_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & \ldots & b_{k_n n} \end{vmatrix}. \tag{1.156}$$

В определителе, стоящем в правой части равенства (1.156), переставим строки так, чтобы первые индексы элементов были упорядочены по возрастанию. Появится множитель $(-1)^t$, где t — число инверсий у вторых индексов элемента a_{ij} матрицы A. Следовательно, из формулы (1.156) получаем

$$|C| = |AB| = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} (-1)^t \, a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} |B| = |A| \cdot |B|. \blacksquare$$

Задачи и упражнения.

1. Выяснить, являются ли членами определителя пятого порядка каждое из следующих выражений:

а) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$; б) $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$;
в) $-a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$; г) $a_{34}a_{12}a_{23}a_{45}a_{52}$;
д) $a_{54}a_{32}a_{14}a_{23}a_{41}$; е) $-a_{34}a_{45}a_{12}a_{53}a_{21}$.

2. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

3. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти миноры и алгебраические дополнения элементов второй строки.

4. Для матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$$

проверить равенство $|AB|=|A|\cdot|B|$.

5. Найти определитель $|ABC|$, если

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 12\\ 7 & 13 & 148\\ 17 & -8 & 25\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 12 & -8 & -1\\ 0 & 15 & 2\end{bmatrix}.$$

1.12. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратная матрица и ее свойства. Назовем квадратную матрицу порядка n *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для A, если выполнено равенство

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E, \tag{1.157}$$

где E — единичная матрица порядка n.

Покажем, что если для данной матрицы существует обратная, то она единственная. В самом деле, пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} — матрицы, обратные для A. Тогда $AA_1^{-1}=E$ и $AA_2^{-1}=E$. Отсюда $A_1^{-1}=A_1^{-1}E=$ $=A_1^{-1}(AA_2^{-1})=(A_1^{-1}A)A_2^{-1}=EA_2^{-1}=A_2^{-1}$.

Докажем теперь теорему.

Теорема 1.20. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для A существует обратная матрица. Тогда из соотношения (1.157) и теоремы 1.19 имеем

$$|AA^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1, \text{ т. е. } |A|\neq 0.$$

Достаточность. Пусть $A\neq 0$, где

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений до соответствующих элементов матрицы A:

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}.$$

Транспонируя ее, получим *просоединенную матрицу*

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы A и B, в силу теоремы Лапласа и свойства 10° определителей, получим

$$AB = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot E,$$

т. е. матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} B \tag{1.158}$$

и является обратной к A. ■

Следствие. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, что следует из равенства

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|.$$

Из формулы (1.158) следует, что *для вычисления обратной матрицы нужно составить присоединенную матрицу B, затем каждый ее элемент разделить на число $|A|$.*

Пример 1. Найти A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Решение. Пусть условие $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ выполнено. Находим $A_{11} = a_{22}$; $A_{12} = -a_{21}$; $A_{21} = -a_{12}$; $A_{22} = a_{11}$. Отсюда

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Тогда, согласно равенству (1.158), имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{1.159}$$

Пример 2. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Легко находим, что $|A| = -2$. Далее

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда

$$B=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-2&0&0\\3&2&-1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&-2&3\\-2&0&2\\0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-3/2\\1&0&-1\\0&0&1/2\end{bmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Для невырожденных матриц имеют место следующие свойства:
1°. $(A^{-1})^{-1}=A$. 2°. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
3°. $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$. 4°. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

Свойство 1° следует из того, что обратной для A^{-1} является $(A^{-1})^{-1}$. Поэтому $(A^{-1})^{-1}A^{-1}=E$, $AA^{-1}=E$. Отсюда в силу единственности обратной матрицы и вытекает справедливость первого свойства. Свойство 2° является матричной записью аналогичного свойства для обратных операторов (см. равенство (1.134)). Свойство 3° является следствием 2° при $B=A$. Свойство 4° установлено ранее (см. формулу (1.138)).

Задачи и упражнения.

1. Вычислить матрицы, обратные следующим:

а) $\begin{bmatrix}3&2&1&2\\7&5&2&5\\0&0&9&4\\0&0&11&5\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4\\6&8\end{bmatrix}.$$

3. Найти матрицу X исходя из матричных равенств:
а) $AX-2BX=C-B$; б) $AX+2X-3C=B$, где A, B, C, X — квадратные матрицы порядка n.

4. Как изменится обратная матрица, если в основной матрице переставить местами две строки?

1.13. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Ориентация тройки векторов. Пусть в $\mathbf{R}^3$ заданы два ортонормированных базиса $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ и $\mathbf{e}^{1'}$, $\mathbf{e}^{2'}$, $\mathbf{e}^{3'}$. Назовем эти базисы *одинаково ориентированными*, если их можно совместить при помощи движения, в противном случае они называются *противоположно ориентированными*.

Тройка векторов $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, начала которых совмещены, называется *левой*, если из конца вектора $\mathbf{e}^3$ кратчайший поворот от $\mathbf{e}^1$ к $\mathbf{e}^2$ виден по часовой стрелке (рис. 1.32). Если же этот поворот виден против часовой стрелки, то тройка $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ называется *правой* (рис. 1.33). Декартова система координат называется *правой (левой)*, если базисные векторы $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ образуют правую (левую) тройку соответственно.

Векторное произведение векторов. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — правый базис

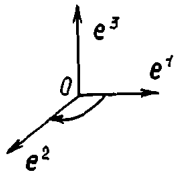


Рис. 1.32

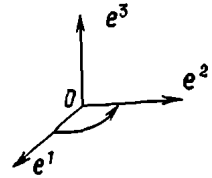


Рис. 1.33

пространства R^3. *Векторным произведением* двух векторов **a** и **b** называется третий вектор **c**, удовлетворяющий трем условиям:

1°. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi$, $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. (1.160)

2°. $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$.

3°. Векторы **a**, **b**, и **c** образуют правую тройку.

Векторное произведение векторов **a** и **b** обозначается $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Установим некоторые свойства векторного произведения.

1°. Длина вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, приведенных к общему началу.

Это следует из равенства (1.160) и рис. 1.34.

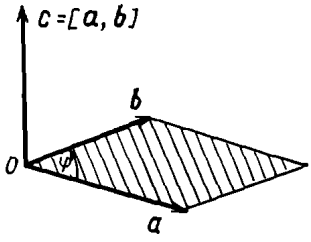


Рис. 1.34

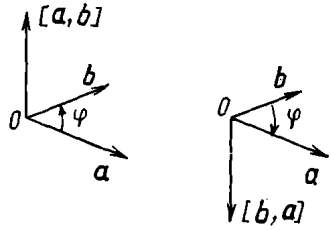


Рис. 1.35

2°. Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы **a** и **b** коллинеарны или один из них нулевой.

Свойство 2° очевидно.

Таким образом, равенство $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ является *условием коллинеарности векторов* **a** и **b**.

3°. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ (антикоммутативность векторного произведения).

В самом деле, если в векторном произведении переставить сомножители, то для выполнения условия 3° определения нужно изменить направление вектора **c** на противоположное (рис. 1.35). Длины же векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, очевидно, одинаковы.

4°. $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a}, \beta\mathbf{b}] = \beta[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\alpha, \beta \in R$.

Справедливость этого свойства следует из определения векторного произведения и рис. 1.36.

Следствие. $[\alpha\mathbf{a}, \beta\mathbf{b}] = \alpha\beta[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\alpha, \beta \in R$.

Смешанное произведение векторов. В пространстве R^3 каждая тройка некомпланарных векторов **a**, **b**, **c**, приложенных к одной точ-

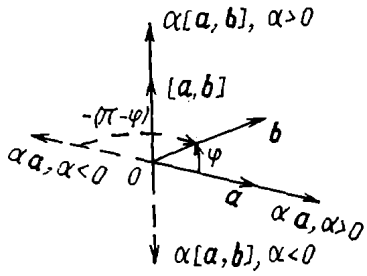


Рис. 1.36

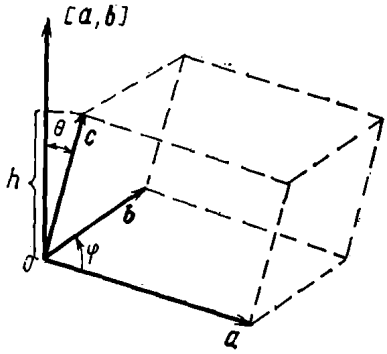


Рис. 1.37

ке, определяет некоторый параллелепипед (рис. 1.37), ребрами которого являются эти векторы. Припишем объему этого параллелепипеда знак плюс, если тройка **a**, **b**, **c** правая, и знак минус, если она левая. Такой параллелепипед называется *ориентированным*.

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов называется число

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}). \tag{1.161}$$

Отметим его свойства.

1°. Смешанное произведение (**a**, **b**, **c**) равно объему ориентированного параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу некомпланарных векторах **a**, **b** и **c**.

В самом деле, примем за основание параллелепипеда параллелограмм, построенный на векторах **a**, **b** (см. рис. 1.37), площадь которого $S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$. Высота параллелепипеда $h = |\mathbf{c}| \cos\theta$, где $\theta = (\mathbf{c}, \widehat{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]})$. Тогда объем искомого параллелепипеда $V = Sh = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \cdot |\mathbf{c}| \cos\theta = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$. Очевидно, $V > 0$, если тройка **a**, **b**, **c** правая $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, и $V < 0$, если она левая $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$.

2°. Смешанное произведение равно нулю, если векторы **a**, **b**, **c** компланарны.

Действительно, (**a**, **b**, **c**) равно нулю тогда и только тогда, когда $\theta = \frac{\pi}{2}$ (в этом случае вектор **c** лежит в плоскости векторов **a** и **b**) либо когда $\sin\varphi = 0$ (в этом случае векторы **a** и **b** коллинеарны, и, значит, три вектора **a**, **b**, **c** лежат в одной плоскости). Если один из трех векторов нулевой, то свойство 2° очевидно.

Таким образом, равенство (**a**, **b**, **c**) = 0 является *условием компланарности* трех векторов **a**, **b** и **c**.

3°. $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$. (1.162)

Справедливость условия (1.162) следует из равенства $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$, так как тройки векторов **a**, **b**, **c** и **b**, **c**, **a** одинаково ориентированы, и из свойства 1°.

В силу коммутативности скалярного произведения и антикоммутативности векторного произведения из свойства 3° получаем цепочку равенств:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \\ = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}). \tag{1.163}$$

4°. (линейность смешанного произведения):

$$(\alpha\mathbf{a}^1 + \beta\mathbf{a}^2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Справедливость этого свойства следует из равенств (1.163) и линейности скалярного произведения.

Докажем теперь дистрибутивность векторного произведения

$$[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}]. \tag{1.164}$$

В самом деле, из линейности смешанного произведения по второму сомножителю для любого вектора $\mathbf{d}$ справедливо равенство

$$(\mathbf{d}, [\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \alpha(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) + \beta(\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \\ (\alpha(\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) + \beta(\mathbf{d}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{d}, \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Отсюда и вытекает соотношение (1.164).

Координатная форма векторного и смешанного произведений векторов. Рассмотрим базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. По определению векторного произведения получаем

$$\begin{aligned} &[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = [\mathbf{j}, \mathbf{j}] = [\mathbf{k}, \mathbf{k}] = 0; \\ &[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}, [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}, [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}; \\ &[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}, [\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{1.165}$$

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют вид $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Тогда, используя соотношения (1.165) и свойства векторного произведения, получаем

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} = \\ = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}. \tag{1.166}$$

Это выражение представляет собой, очевидно, разложение по элементам первой строки определителя

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{1.167}$$

Если вектор $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3) = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$, то из определения смешанного произведения и равенства (1.166) получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3 = \\ = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.168}$$

Таким образом, объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$, да-

ется формулой (1.168), а площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, равна

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \left|\mathrm{mod} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right|, \qquad (1.169)$$

где mod означает модуль.

Задачи и упражнения

1. С помощью векторного произведения получить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Сравнить результат с формулой (1.54).

2. Векторы $AB = (-3, -2, 6)$ и $BC = (-2, 4, 4)$ служат сторонами треугольника ABC. Найти высоту AD.

3. Доказать тождество

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} = S^2,$$

где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

4. Компланарны ли векторы $\mathbf{a} = (8, -3, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 2, -1)$ и $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$? Если нет, то вычислить объем параллелепипеда, построенного на этих векторах.

1.14. РАНГ МАТРИЦЫ

Линейная зависимость строк матрицы. Пусть дана матрица размера $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ее i-ю строку можно рассматривать как вектор-строку $\mathbf{u}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$, а любой j-й столбец — как вектор-столбец

$$\mathbf{v}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Строки матрицы A называются *линейно-зависимыми*, если линейно-зависимы векторы $\mathbf{u}^i \in \mathbf{R}^n$, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что справедливо равенство

$$\alpha_1 \mathbf{u}^1 + \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}^m = \mathbf{0} \qquad (1.170)$$

или

$$\alpha_1 (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + \alpha_2 (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + \alpha_m (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) =$$
$$= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1}, \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_m a_{m2}, \dots, \alpha_1 a_{1n} +$$
$$+ \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn}) = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0).$$

Отсюда в координатной форме линейная зависимость строк означает выполнение n равенств

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \ldots + \alpha_m a_{mj} = 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (1.171)$$

Как установлено ранее, линейная зависимость системы векторов означает, что один из них есть линейная комбинация остальных векторов системы. Для матрицы A линейная зависимость строк равносильна тому, что ее некоторая строка является линейной комбинацией остальных строк.

Пример 1. Строки матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

линейно-зависимы, так как имеет место равенство $5\mathbf{u}^1 - 2\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}^3 = -5\mathbf{u}^1 + 2\mathbf{u}^2$, т. е. третья строка есть линейная комбинация первых двух строк с коэффициентами -5 и 2.

Если равенство (1.170) или равносильное ему равенство (1.171) имеют место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то строки матрицы A называются *линейно-независимыми*. Например, строки единичной матрицы

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

линейно-независимы (см. пример 8 § 1.6).

Аналогичным образом вводится понятие линейной независимости и линейной зависимости столбцов матрицы как соответствующих векторов-столбцов $\mathbf{v}^j \in \mathbf{R}^m$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Пример 2. Столбцы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

линейно-зависимы, так как $-\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}^3 = -\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2$, т. е. третий столбец является линейной комбинацией первых двух столбцов с коэффициентами -1 и 1.

Докажем теперь следующее важное утверждение.

Теорема 1.21. Для всякой матрицы число ее линейно-независимых строк равно числу линейно-независимых столбцов.

Доказательство. Пусть число линейно-независимых строк матрицы A равно r, а число линейно-независимых столбцов — s, причем для определенности положим, что $r < s$. Пусть этими строками будут $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^r$, а столбцами — $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^s$. Элементы, стоящие на пересечении указанных строк и столбцов, образуют матрицу

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rs} \end{bmatrix}.$$

Ее каждый из s столбцов $\bar{\mathbf{v}}^1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r1})^T$, $\bar{\mathbf{v}}^2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{r2})^T$, ..., $\bar{\mathbf{v}}^s = (a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{rs})^T$ как вектор из $\mathbf{R}^r$ имеет r координат, причем $r < s$. Поскольку в $\mathbf{R}^r$ векторы, число которых больше r, согласно теореме 1.6, линейно-зависимы, то, следовательно, векторы $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, ..., $\mathbf{v}^s$ линейно-зависимы. Значит, в силу равенства (1.171) существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 \bar{\mathbf{v}}^1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{v}}^2 + \ldots + \alpha_s \bar{\mathbf{v}}^s = 0, \tag{1.172}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ — вектор из $\mathbf{R}^s$.

Рассмотрим теперь матрицу

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rs} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{ms} \end{bmatrix}.$$

Строки $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, ..., $\mathbf{u}^r$ матрицы A линейно-независимы. Тогда линейно-независимыми, в силу (1.171), будут и строки $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^1$, $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^2$, ..., $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^r$ матрицы $\bar{\bar{A}}$, а остальные ее строки линейно выражаются через $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^1$, $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^2$, ..., $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^r$, т. е. выполняются равенства

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}^k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ik} \bar{\bar{\mathbf{u}}}^i, \quad k = r+1, r+2, \ldots, m, \tag{1.173}$$

где α_{ik} — некоторые коэффициенты.

Распишем подробнее равенство (1.172). Имеем

$$\bar{\bar{A}} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1s}\alpha_s \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2s}\alpha_s \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \ldots + a_{rs}\alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{\bar{\mathbf{u}}}^1, \alpha) \\ (\bar{\bar{\mathbf{u}}}^2, \alpha) \\ \cdot \cdot \cdot \\ (\bar{\bar{\mathbf{u}}}^r, \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{\bar{\mathbf{u}}}^i, \alpha) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{1.174}$$

Отсюда, из соотношения (1.173) получим

$$(\bar{\bar{\mathbf{u}}}^k, \alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ik} (\bar{\bar{\mathbf{u}}}^i, \alpha) = 0, \quad k = r+1, r+2, \ldots, m. \tag{1.175}$$

Тогда из равенств (1.174) и (1.175) находим

$$\bar{\bar{A}} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1s}\alpha_s \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \ldots + a_{rs}\alpha_s \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{ms}\alpha_s \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \ldots + \alpha_s \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{rs} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \ldots + \alpha_s \mathbf{v}^s = 0.$$

Так как не все α_i равны нулю, $i = 1, 2, \ldots, s$, то последнее равенство говорит о том, что векторы-столбцы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^s$ матрицы A линейно-зависимы, что противоречит их выбору. Следовательно, предположение $r < s$ неверно. Аналогично показывается и невозможность $r > s$. Значит, $r = s$. ■

Ранг матрицы. Максимальное число линейно-независимых строк матрицы A называется *рангом матрицы* и обозначается $r = r(A)$. Из этого определения и теоремы 1.21 следует, что ранг матрицы равен и максимальному числу линейно-независимых столбцов матрицы.

Пусть $L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m)$ и $L(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n)$ — пространства, порожденные строками и столбцами матрицы A соответственно. Так как размерность пространства равна максимальному числу линейно-независимых векторов в нем, то, по определению ранга матрицы, получаем соотношения

$$\dim L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m) = \dim L(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n) = r(A) = r. \quad (1.176)$$

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

б) умножение строки (столбца) на число α, не равное нулю;

в) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы линейной комбинации других ее строк (столбцов);

г) транспонирование матрицы.

Очевидно, что аналогичные операции над векторами $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m$ не меняют размерности пространства $L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m)$, порожденного ими.

Отсюда в силу соотношения (1.176) получаем следующее важное утверждение: *элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.*

Этот вывод используется при вычислении ранга матрицы. Для этого при помощи элементарных преобразований данная матрица A преобразуется в матрицу B, ранг которой легко находится. Если $r(A) = r(B)$, то будем далее писать $A \sim B$.

Очевидно, что любую ненулевую матрицу A можно привести с помощью элементарных преобразований к виду

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1r} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2r} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{rr} & \ldots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ не равны нулю.

Докажем, что $r(B) = r$, т. е. первые r строк этой матрицы линейно-независимы. Для этого составим линейную комбинацию векторов строк $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^r$ матрицы B и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1\mathbf{u}^1 + \alpha_2\mathbf{u}^2 + \ldots + \alpha_r\mathbf{u}^r = \mathbf{0}. \quad (1.177)$$

Равенство (1.177) в координатной форме в силу соотношения (1.171) эквивалентно системе равенств

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 b_{11} &&= 0;\\
&\alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{22} &&= 0;\\
&\alpha_1 b_{13} + \alpha_2 b_{23} + \alpha_3 b_{33} &&= 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &&\\
&\alpha_1 b_{1r} + \alpha_2 b_{2r} + \alpha_3 b_{3r} + \dots + \alpha_r b_{rr} &&= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что числа $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ не равны нулю, получаем последовательно $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_r = 0$.

Таким образом, равенство (1.177) выполнимо лишь при всех $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. А это и означает линейную независимость первых r строк матрицы B, т. е. $r(B) = r$, так как наличие нулевых строк в матрице, очевидно, на ее ранг не влияет.

Пример 3. Ранг треугольной матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

равен числу ненулевых элементов, расположенных на главной диагонали.

Пример 4. Ранг единичной матрицы

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

порядка n равен, очевидно, n.

Пример 5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вычитая первую строку из третьей, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Пример 6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Прибавляя первую строку ко второй и вычитая первую строку из третьей, получаем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -3 \end{bmatrix}, \ r(B) = r(A).$$

Умножив теперь вторую строку на 3 и прибавив ее к третьей, получим матрицу

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ r(C) = r(A).$$

Поменяем здесь второй и третий столбцы. В итоге имеем матрицу

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда $r(D) = r(A) = 2$.

Условия равенства нулю определителя. Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1.22. Для того чтобы определитель n-го порядка матрицы A равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно-зависимыми.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $|A| = 0$. Докажем, что строки матрицы A в этом случае линейно-зависимы. Элементарными преобразованиями приводим матрицу A к треугольному виду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = B.$$

Элементарные преобразования пп. в, г в силу свойств 9° и 1° определителя не меняют его значения. Преобразования пп. а и б, согласно свойствам 4° и 3° определителя, либо изменяют его знак на противоположный, либо умножают его значение на $\alpha \neq 0$. Отсюда следует, что $|B| = k|A|$, где $k \neq 0$, т. е. $|B| = b_{11}b_{22} \dots b_{nn} = 0$. Это означает, что хотя бы один из элементов $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ равен нулю, что равносильно $r(B) = r(A) < n$. Отсюда и из определения ранга матрицы A вытекает линейная зависимость ее строк.

Достаточность. Если строки определителя линейно-зависимы, то по свойству 8° определителя он равен нулю. ■

Следствие 1. Для того чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее ранг был меньше n, т. е.

$$(|A| = 0) \Leftrightarrow (r(A) < n). \tag{1.178}$$

Следствие 2. Для того чтобы определитель матрицы A порядка n был отличен от нуля, необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно-независимы, т. е.

$$(|A| \neq 0) \Leftrightarrow (r(A) = n).$$

Следствие 3. Для того чтобы векторы $\mathbf{u}^1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{u}^2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\mathbf{u}^n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ пространства $\mathbf{R}^n$ были линейно-зависимы (линейно-независимы), необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы A, строками или столбцами которой служат данные векторы, был равен нулю (отличен от нуля).

Теорема о базисном миноре. Назовем *базисными строками (столбцами)* матрицы A любые ее r линейно-независимых строк (столбцов), где r — ранг матрицы. Элементы матрицы A, стоящие на пересечении фиксированных k строк и k столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k. Ее определитель называется минором k-го порядка матрицы A. Если выбранными строками и столбцами являются базисные, то и соответствующий минор называется *базисным*.

Теорема 1.23 (о базисном миноре). Для того чтобы ранг матрицы A был равен r, необходимо и достаточно, чтобы существовал отличный от нуля минор порядка r, а всякий минор $r+1$-го порядка был равен нулю.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $r(A)=r$. Это значит, что матрица A имеет r линейно-независимых строк и столбцов, а любые $r+1$ строк или столбцов линейно-зависимы. Тогда на основании теоремы 1.21 существует минор r-го порядка, отличный от нуля, а всякий минор $r+1$-го порядка равен нулю.

Достаточность. Пусть существует минор r-го порядка, отличный от нуля, а всякий минор $r+1$-го порядка равен нулю. Тогда в силу следствия 2 теоремы 1.21 матрица имеет r линейно-независимых строк. Если при этом предположить существование еще одной $r+1$-й строки, образующей с данными r строками линейно-независимую систему, то найдется минор $r+1$-го порядка, отличный от нуля, что противоречит условию. ■

Следствие. Для того чтобы векторы $\mathbf{u}^1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $\mathbf{u}^2=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, $\mathbf{u}^m=(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$ были линейно-независимы (зависимы), необходимо и достаточно, чтобы у матрицы A, строками которой являются эти векторы, нашелся хотя бы один минор порядка m, отличный от нуля (все миноры порядка m были равны нулю).

Замечание. Выше мы определили ранг матрицы как максимальное число линейно-независимых строк. Теорема о базисном миноре позволяет сформулировать другое эквивалентное определение ранга матрицы как наивысшего порядка отличных от нуля миноров этой матрицы.

Пример 7. Установить, являются ли линейно-зависимыми векторы $\mathbf{u}^1=(1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{u}^2=(0, 1, -1, 0)$, $\mathbf{u}^3=(0, 0, 1, -1)$, $\mathbf{u}^4=(-1, 0, 0, 1)$, и найти их базис.

Решение. Составим матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что ее определитель равен нулю, но минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Поэтому векторы линейно-зависимы, и так как базисный минор образован из элементов первых трех строк, то базисом служат векторы $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^3$.

Задачи и упражнения

1. Определить ранг матрицы

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 11 & 5 & 8 \\ 15 & 7 & 11 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из следующих систем векторов из $\mathbf{R}^3$:

а) $\mathbf{u}^1=(1, 1, -1)$, $\mathbf{u}^2=(2, 2, -2)$;
б) $\mathbf{u}^1=(1, -3, 1)$, $\mathbf{u}^2=(1, 1, 0)$;

в) $\mathbf{u}^1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{u}^2 = (1, 4, -1)$, $\mathbf{u}^3 = (0, -9, 5)$;
г) $\mathbf{u}^1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{u}^2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u}^3 = (0, 2, 3)$, $\mathbf{u}^4 = (0, 1, -1)$.

3. Доказать, что $r(A) = r(AB)$, если матрица B невырожденная.

1.15. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие понятия. *Линейной системой m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$* называется система вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}, \qquad (1.179)$$

где числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ — *коэффициенты системы.* Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *основной матрицей системы.* Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в правых частях системы (1.179) называются *свободными членами.* Если все свободные члены равны нулю, то система (1.179) называется *однородной*, если же хотя бы одно $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то система называется *неоднородной.*

Решением системы называется всякая совокупность n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая, будучи подставлена в систему, превращает каждое ее уравнение в тождество. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной.* Если система не имеет решений, она называется *несовместной.* Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, система, имеющая более одного решения, — *неопределенной. Решить систему* — это значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти множество всех ее решений.

Линейную систему (1.179) удобно записывать в матричной форме, если ввести векторы-столбцы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *вектором-решением* и *вектором правых частей.* Тогда, согласно соотношению (1.109), система (1.179) заменяется одним эквивалентным ей матричным уравнением

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (1.180)$$

Решение матричного уравнения (1.180) заключается в отыскании такого столбца $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который при данной матрице A и данном векторе правых частей $\mathbf{b}$ обращает это уравнение в тождество.

Совместность линейных систем. Получим необходимые и достаточные условия совместности произвольных линейных систем вида (1.179).

Составим матрицу

$$[A\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

которая называется *расширенной матрицей системы* (она получается из основной матрицы добавлением к ней столбца свободных членов).

Теорема 1.23 (Кронекера — Капелли)*. Для того чтобы линейная система (1.179) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система совместна. Докажем, что $r(A) = r([A\,|\,\mathbf{b}])$.

В самом деле, в силу совместности системы существуют числа $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, такие, что

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}\alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (1.181)$$

Равенство (1.181) означает, что последний столбец матрицы $[A\,|\,\mathbf{b}]$ является линейной комбинацией остальных ее столбцов. Его можно вычеркнуть, не изменяя ранга матрицы. При этом матрица $[A\,|\,\mathbf{b}]$ перейдет в матрицу A, т. е. $r(A) = r([A\,|\,\mathbf{b}])$.

Достаточность. Пусть ранги матриц A и $[A\,|\,\mathbf{b}]$ совпадают, причем $r(A) = r([A\,|\,\mathbf{b}]) = r$. Рассмотрим r базисных столбцов матрицы A (т. е. и матрицы $[A\,|\,\mathbf{b}]$). По условию последний столбец матрицы $[A\,|\,\mathbf{b}]$ является линейной комбинацией базисных столбцов, а следовательно, и всех столбцов матрицы A. Это означает, что существуют числа α_1, α_2, ..., α_n, такие, что выполняются равенства (1.181), т. е. вектор-столбец $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ является решением системы (1.179). Таким образом, система (1.179) совместна. ■

Следствие. Если ранг расширенной матрицы системы не равен рангу основной матрицы, то система несовместна.

Пример 1. Исследовать на совместность систему

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2; \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{array}\right\} \qquad (1.182)$$

---

* Л. Кронекер (1823—1891) — немецкий математик; А. Капелли (1855—1910) — итальянский математик.

Решение. Найдем ранги матриц $[A \mid \mathbf{b}]$ и A:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r([A \mid \mathbf{b}]) = r(A) = 2,$$

т. е. система совместна.

Правило Крамера*. Теорема Кронекера — Капелли устанавливает необходимые и достаточные условия совместности линейной системы, не указывая способа нахождения самого решения этой системы.

Рассмотрим сначала систему n линейных уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \ldots\ + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1.183)$$

с n неизвестными и отличным от нуля определителем основной матрицы (*определителем системы*). Выпишем матрицу A системы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.184)$$

В матричной форме система (1.183) эквивалентна уравнению (1.180), где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$.

Покажем, что такая система имеет решение, и притом единственное, и найдем его.

Так как $|A| \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой (1.158). Умножив обе части уравнения $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ слева на матрицу A^{-1}, получим

$$(A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}) \Leftrightarrow (E\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}),$$

откуда

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \qquad (1.185)$$

Формула (1.185) является *матричной записью решения рассматриваемой системы*. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы.

Матричное равенство (1.185) с учетом формулы (1.158) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

* Г. Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ \dots\ + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ \dots\ + A_{n2}b_n \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ \dots\ + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$x_j = \frac{1}{|A|}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ \dots\ + A_{nj}b_n),\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Но по теореме Лапласа

$$A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ \dots\ + A_{nj}b_n = D_j,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где D_j — определитель, полученный из определителя $|A|$ заменой j-го столбца столбцом свободных членов системы, т. е.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \dots,\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, имеем соотношения

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|},\quad x_2 = \frac{D_2}{|A|},\ \dots,\ x_n = \frac{D_n}{|A|}. \tag{1.186}$$

Выражения (1.186) называются *формулами Крамера*. Тем самым мы установили следующее правило для получения решения системы (1.183) (правило Крамера): *если определитель системы (1.183) отличен от нуля, то она имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера* (1.186).

Заметим, что существование этого решения следует из теоремы Кронекера — Капелли, ибо в силу соотношения $|A| \neq 0$ ранг основной матрицы A равен n, а ранг расширенной матрицы, содержащей n строк, больше числа n быть не может и поэтому равен рангу основной матрицы.

Пример 2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

а) по формулам Крамера; б) матричным способом.

Решение. а) Находим, что

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;\quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

По формулам (1.186) получаем: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.

б) Согласно соотношению (1.158),

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда по формулам (1.185) получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Структура решений однородных систем. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.187)$$

или в матричной форме

$$Ax = 0, \qquad (1.188)$$

где A — основная матрица системы, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$. Однородная система всегда совместна, так как она имеет тривиальное (нулевое) решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$.

Возникает вопрос: при каких условиях однородная система (1.187) имеет нетривиальные решения? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 1.24. Для того чтобы однородная система (1.188) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше числа n, где n — число ее столбцов.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть однородная система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение, т. е. существуют числа x_1, x_2, ..., x_n, не все равные нулю, такие, что выполнено равенство

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ \ldots \ + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \mathbf{0}, \qquad (1.189)$$

означающее линейную зависимость столбцов матрицы A. По определению ранга получаем, что $r(A) < n$.

Достаточность. Пусть $r(A) < n$. Тогда столбцы матрицы A линейно-зависимы. Значит, существуют не все равные нулю числа x_1, x_2, ..., x_n, такие, что имеет место равенство (1.189), из которого следует, что система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение. ■

Следствие 1. Для того чтобы однородная система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ с $n \times n$-матрицей A имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$.

Следствие 2. Для того чтобы однородная система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ с $n \times n$-матрицей A имела единственное нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $(r(A) = n) \Leftrightarrow (|A| \neq 0)$.

Итак, при $r(A) < n$ однородная система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальные решения. Наша задача — отыскать структуру множества всех ее решений.

Теорема 1.25. Множество решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ образует подпространство линейного пространства $\mathbf{R}^n$, размерность которого равна $n - r$, где r — ранг основной матрицы A.

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — два вектора-решения из $\mathbf{R}^n$ однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т. е. $A\mathbf{x}^1 = \mathbf{0}$ и $A\mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$. Тогда в силу линейности операций над матрицами для любых действительных чисел α_1 и α_2 имеем

$$A(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2) = A(\alpha_1\mathbf{x}^1) + A(\alpha_2\mathbf{x}^2) = \alpha_1 A\mathbf{x}^1 + \alpha_2 A\mathbf{x}^2 = \mathbf{0},$$

а это и означает, что совокупность всех решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ образует подпространство линейного пространства $\mathbf{R}^n$. Найдем размерность этого подпространства.

Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m$ — векторы-строки матрицы A. Тогда систему $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ можно записать в виде равенств

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}^1, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{u}^2, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ (\mathbf{u}^m, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{u}^1, \mathbf{x}) = 0; \\ (\mathbf{u}^2, \mathbf{x}) = 0; \\ \ldots\ldots \\ (\mathbf{u}^m, \mathbf{x}) = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что всякий вектор-решение $\mathbf{x}$ ортогонален векторам-строкам матрицы A, т. е. множество всех решений однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ образует ортогональное дополнение $L^{\perp}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^m)$, где $L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m)$ — пространство, порожденное строками матрицы A. Согласно выражениям (1.103) и (1.176), имеем $n = \dim \mathbf{R}^n = \dim L(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m) + \dim L^{\perp}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m) = r(A) + \dim L^{\perp}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m)$. Отсюда получаем, что $\dim L^{\perp}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^m) = n - r(A) = n - r$. ■

Таким образом, теорема 1.25 устанавливает, что *множество решений однородной системы* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *образует линейное подпространство размерности* $n - r$. Это подпространство является ядром оператора, матрица которого A есть матрица однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Как найти линейно-независимые решения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, через которые линейно выражались бы все остальные ее решения?

Пусть r — ранг матрицы A, причем $r < n$. Пусть для определенности базисный минор D r-го порядка расположен в левом верхнем углу матрицы A:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $D \neq 0$.

Перенесем слагаемые с неизвестными $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ первых r уравнений системы (1.187) в правые части. Получим систему

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right\}. \quad (1.190)$$

Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ называются *свободными*. Так как $D \neq 0$, то система (1.190) имеет решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера. Очевидно, оно будет зависеть от $n-r$ свободных неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Придадим им последовательно следующие $n-r$ наборов значений.

$$\begin{aligned}
&1)\ x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\ \ldots,\ x_n=0;\\
&2)\ x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ \ldots,\ x_n=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n-r)\ x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0,\ \ldots,\ x_n=1.
\end{aligned}$$

При этом получим $n-r$ решений системы (1.187), соответствующих указанным наборам значений. Полученные решения запишем в в виде

$$\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_r\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{x}^{n-r}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_r\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}. \qquad (1.191)$$

Так как матрица, составленная из столбцов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{n-r}$, имеет минор порядка $n-r$, равный единице (в последних $n-r$ ее строках), то ранг матрицы равен $n-r$, и, следовательно, решения $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, ..., $\mathbf{x}^{n-r}$ линейно-независимы. Поскольку число этих решений равно размерности пространства решений, то их можно взять в качестве базиса этого пространства.

Совокупность из $n-r$ линейно-независимых решений однородной системы называется *фундаментальной системой решений*.

Таким образом, в пространстве решений однородной системы существует $n-r$ линейно-независимых (базисных) векторов-решений $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{n-r}$, и всякий вектор-решение $\bar{\mathbf{x}}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{n-r}$, т. е.

$$\bar{\mathbf{x}}=C_1\mathbf{x}^1+C_2\mathbf{x}^2+\ldots+C_{n-r}\mathbf{x}^{n-r}, \qquad (1.192)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные. Решение $\bar{\mathbf{x}}$, определяемое равенством (1.192), называется *общим решением* линейной однородной системы $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned}
x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=0;\\
2x_1+6x_2+9x_3+5x_4&=0;\\
-x_1-3x_2+3x_3&=0.
\end{aligned}$$

Решение. Основная матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix}.$$

Умножим первую строку на 2 и вычтем из второй, затем первую строку сложим с третьей. В результате получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Удвоенную вторую строку ее вычтем из третьей и получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как в элементарных преобразованиях участвовали только строки матрицы, то в тех же преобразованиях участвовали и сами уравнения системы, при этом мы получили новую, равносильную исходной, систему, вид которой определяется последней матрицей, т. е. преобразованная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0; \\ 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{3}x_4; \\ x_1 &= -3x_2 - x_4. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, решение системы зависит от двух свободных и независимых параметров x_2 и x_4. Общее решение выражается через эти параметры, т. е.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_2 и x_4 — произвольные постоянные. Вектор $(-3, 1, 0, 0)^T$ является решением системы при $x_2 = 1$ и $x_4 = 0$, а вектор $\left(-1, 0, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$ — решением при $x_2 = 0$ и $x_4 = 1$.

Пример 4. Найти общее решение однородной системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Находим ранг основной матрицы системы с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2. \qquad (1.193)$$

Так как ранг системы меньше числа неизвестных, то система имеет ненулевые решения. Размерность пространства решений этой системы равна $n - r = 2$. Преобразованная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0; \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -4x_3 + 3x_4; \\ x_2 &= -6x_3 + 5x_4, \end{aligned}\right.$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 8x_3 - 7x_4; \\ x_2 &= -6x_3 + 5x_4. \end{aligned}\right\}$$

Эти формулы дают общее решение системы, ибо, придавая x_3 и x_4 произвольные значения, получим при этом x_1 и x_2. Запишем общее решение в виде вектора-столбца и разложим его по фундаментальной системе решений:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая здесь $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, получаем общее решение в виде $\bar{x} = C_1\mathbf{x}^1 + C_2\mathbf{x}^2$, где столбцы $\mathbf{x}^1 = (8, -6, 1, 0)^T$ и $\mathbf{x}^2 = (-7, 5, 0, 1)^T$ образуют фундаментальную систему решений.

Структура решений неоднородных систем. Пусть $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — неоднородная система (1.179). Вектор $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$, для которого $A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$, называется *частным решением* этой системы.

Теорема 1.26. Всякое решение неоднородной линейной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x}^0$ — некоторое частное решение этой системы, а $\bar{\mathbf{x}}$ — решение соответствующей однородной системы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0$ — решение неоднородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, а $\bar{\mathbf{x}}$ — решение однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда $A(\mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{x}}) = A\mathbf{x}^0 + A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{x}}$ есть решение неоднородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольное решение неоднородной системы, а $\mathbf{x}^0$ — некоторое ее частное решение. Тогда $(A\mathbf{x} = \mathbf{b}, A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}) \Rightarrow (A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0})$, т. е. $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}$ есть решение однородной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Отсюда $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{x}}$. ■

Итак, всякое решение неоднородной системы состоит из суммы некоторого ее частного решения и любого решения $\bar{\mathbf{x}}$ соответствующей однородной системы. Тогда, согласно формуле (1.192), для общего решения неоднородной системы справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0 + C_1\mathbf{x}^1 + C_2\mathbf{x}^2 + \ldots + C_{n-r}\mathbf{x}^{n-r}. \qquad (1.194)$$

Пример 5. Найти общее решение неоднородной системы (1.182).

Решение. Так как преобразованная расширенная матрица системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r([A \mid \mathbf{b}]) = r(A) = 2,$$

то эквивалентная ей система приводится к равенствам

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5; \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5; \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{array}\right.$$

Решение запишем в виде

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + C_1\mathbf{x}^1 + C_2\mathbf{x}^2 + C_3\mathbf{x}^3$, где $\mathbf{x}^0 = (-16, 23, 0, 0, 0)^T$ — частное решение, а столбцы $\mathbf{x}^1 = (1, -2, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{x}^2 = (1, -2, 0, 1, 0)^T$ и $\mathbf{x}^3 = (5, -6, 0, 0, 1)^T$ образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы; $C_1 = x_3$, $C_2 = x_4$, $C_3 = x_5$ — произвольные постоянные.

Пример 6. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Находим ранг расширенной матрицы

$$[A \mid b] - \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 16 & -14 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r([A \mid b]) = r(A) = 3.$$

Система совместна и имеет единственное решение, так как ранг основной матрицы равен числу неизвестных. Это решение можно найти по формулам Крамера, если в системе отбросить последнее уравнение, оказавшееся следствием первых трех (в результате элементарных преобразований последняя строка в матрице $[A \mid b]$ стала нулевой). Можно это решение найти проще, записав по последней матрице равносильную систему:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8; \\ x_2 - x_3 &= 1; \\ x_3 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

откуда последовательно находим $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 3$.

Метод Гаусса*. Приведем удобный алгоритм решения линейной системы вида (1.179). Ее расширенную матрицу элементарными преобразованиями над строками можно свести либо к треугольному виду

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{nn} & d_n \end{array}\right], \qquad (1.195)$$

либо к трапециевидному

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & a_{1m+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2m} & c_{2m+1} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{mm} & c_{mm+1} & \ldots & c_{mn} & d_m \end{array}\right].$$

Матрица (1.195) соответствует преобразованной системе

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{nn}x_n &= d_n. \end{aligned}\right\}$$

В этом случае, начиная с последнего уравнения, находим последовательно значения неизвестных x_n, x_{n-1}, ..., x_1 единственным образом, если $c_{nn} \neq 0$, ..., $c_{22} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$. Если в некоторой i-й стро-

* К. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

ке все $c_{ij} = 0$, а $d_i \neq 0$, то это свидетельствует о том, что система несовместна, так как в данном случае $r([A \mid \mathbf{b}]) \neq r(A)$.

Для трапециевидной матрицы преобразованная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2m}x_m + c_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{mm}x_m + c_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + c_{mn}x_n &= d_m. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n; \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2m}x_m &= d_2 - c_{2m+1}x_{m+1} - \ldots - c_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{mm}x_m &= d_m - c_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - c_{mn}x_n. \end{aligned}\right\}$$

Придавая переменным x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n произвольные значения, находим из системы x_m, x_{m-1}, ..., x_1.

Описанный метод решения линейных систем носит название *метода Гаусса* или *метода исключения неизвестных*.

Таким образом, метод Гаусса дает возможность не только решить систему, но и ответить на вопрос о ее совместности.

Пример 7. Методом Гаусса решить систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -3; \\ 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 &= 0; \\ -3x_1 + 12x_2 + 3x_3 &= 9. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу $[A \mid \mathbf{b}]$:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 6 & -10 & 0 \\ -3 & 12 & 3 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 10 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Отсюда преобразованная исходная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -3; \\ x_2 - x_3 &= 0; \\ 3x_3 &= 3. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_3 &= 1; \\ x_2 &= 1; \\ x_1 &= 2. \end{aligned}\right.$$

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса. Пусть матрица A — невырожденная. Составим матрицу

$$[A \mid E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right],$$

которая получается, если справа к матрице A приписать единичную матрицу E. Применяя метод Гаусса, матрицу $[A \mid E]$ можно преобразовать к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right].$$

Отсюда

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = A^{-1},$$

что следует из равенства $A^{-1}[A \mid E] = [A^{-1}A \mid A^{-1}E] = [E \mid A^{-1}]$.

Пример 8. Методом Гаусса вычислить обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицу

$$[A|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Элементарными преобразованиями строк она сводится к виду

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Задачи и упражнения

1. Найти фундаментальную систему решений линейной системы:

а) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 0; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{array}\right\}$

2. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее решение:

а) $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 = 1; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6; \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{array}\right\}$

3. Решить систему методом Гаусса:

а) $\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{array}\right\}$

4. Решить систему, используя формулы Крамера, и проверить результат, применив матричный метод:

а) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_3 - 3 = 0; \\ x_1 + x_3 - 1 = 0; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{array}\right\}$

1.16. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов в конечномерном пространстве. Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор, действующий в $\mathbf{R}^n$. Всякий ненулевой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ называется *собственным вектором оператора* $\mathbf{A}$ *(матрицы* A*)*, если оператор $\mathbf{A}$ переводит вектор $\mathbf{x}$ в коллинеарный:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}. \tag{1.196}$$

Число λ при этом называется *собственным значением оператора* $\mathbf{A}$ *(матрицы* A*)*, соответствующим собственному вектору $\mathbf{x}$.

Отметим, что если оператор $\mathbf{A}$ невырожден, то все его собственные значения отличны от нуля.

В самом деле, если некоторое собственное значение $\lambda = 0$, то из условия (1.196) получим $\mathbf{Ax} = 0 \cdot \mathbf{x} = 0$, откуда в силу невырожденности оператора $\mathbf{A}$ следует, что собственный его вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Это противоречит определению собственного вектора. Значит, $\lambda \neq 0$.

Укажем некоторые свойства собственных векторов.

Пусть для оператора $\mathbf{A}$ существует обратный $\mathbf{A}^{-1}$. Умножая равенство (1.196) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем

$$(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda \mathbf{x})) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x},$$

т. е. λ^{-1} является собственным значением оператора $\mathbf{A}^{-1}$ с тем же собственным вектором $\mathbf{x}$.

Умножая равенство (1.196) слева на $\mathbf{A}$, получим $\mathbf{A}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}$ или $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$, т. е. λ^2 — собственное значение оператора $\mathbf{A}^2$ с тем же собственным вектором $\mathbf{x}$. Аналогично доказываем, что $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, где $k \in \mathbf{N}$.

Множество всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром*.

Следующие свойства собственных векторов сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.27. Собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, соответствующие попарно-различным собственным значениям, линейно-независимы.

Доказательство. Теорему докажем индукцией по числу k. Пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ — собственные векторы, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — соответствующие им попарно-различные собственные значения линейного оператора $\mathbf{A}$.

Очевидно, при $k = 1$ теорема верна. Допустим, что теорема верна для всяких $k - 1$ собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, и покажем, что она останется верной и для любых k собственных векторов.

Предположим противное, т. е. допустим, что k собственных векторов линейно-зависимы. Следовательно, справедливо равенство

$$\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0},$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Подействуем оператором $\mathbf{A}$ на векторы, стоящие в обеих частях этого равенства, и получим

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k \mathbf{x}^k = \mathbf{0}.$$

Умножая первое равенство на λ_k и вычитая из второго, находим

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{x}^1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \mathbf{x}^2 + \ldots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{0},$$

откуда по предположению индукции все коэффициенты должны быть равны нулю, в том числе и $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k)$, что противоречит условиям $\alpha_1 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_k$. Значит, наше предположение неверно, и векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ линейно-независимы. ■

Следствие. В пространстве $\mathbf{R}^n$ линейный оператор $\mathbf{A}$ не может иметь более n собственных векторов с различными собственными значениями (так как в $\mathbf{R}^n$ всякие $n+1$ векторов линейно-зависимы).

Теорема 1.28. Все собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, отвечающие собственному значению λ, образуют подпространство данного линейного пространства.

Доказательство. В самом деле, если $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \lambda \mathbf{x}^1$ и $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \lambda \mathbf{x}^2$, то

$$\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2) = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \alpha_1 \lambda \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \lambda \mathbf{x}^2 = \lambda (\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2),$$

что и доказывает теорему. ■

Таким образом, если $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ, то и всякий вектор $\alpha\mathbf{x}$, где $\alpha \neq 0$, тоже является собственным вектором этого оператора, соответствующим собственному значению λ. Число α всегда можно выбрать таким, что $\| \alpha \mathbf{x} \| = 1$, т.е. $\alpha = \dfrac{1}{\| \mathbf{x} \|}$. Собственный вектор, для которого $\| \mathbf{x} \| = 1$, называется *нормированным*.

Характеристическое уравнение матрицы. Рассмотрим, как найти координаты собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, заданного своей матрицей A в некотором базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ пространства $\mathbf{R}^n$.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ является собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, соответствующим собственному значению λ. Тогда соотношение (1.196) в матричной форме перепишется в виде

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

где E — единичная матрица. Если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрица оператора $\mathbf{A}$, то последнее равенство соответствует однородной системе n уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=0;\\
&a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +(a_{nn}-\lambda)x_n=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1.197)$$

относительно n величин x_1, x_2, ..., x_n — координат собственного вектора x. Нас интересуют только нетривиальные решения этой системы, так как вектор x должен быть отличен от нуля. Это возможно тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы (1.197) меньше числа неизвестных (следствие 1 из теоремы 1.24), что равносильно равенству нулю определителя матрицы этой системы, т.е.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (1.198)$$

Равенство (1.193) называется *характеристическим уравнением матрицы A*. Оно выражает условие, которому должны удовлетворять все собственные значения матрицы A. Левая часть характеристического уравнения (1.193) представляет собой многочлен степени n, называемый *характеристическим многочленом матрицы A*. Всякому его корню λ_0 отвечает собственный вектор, координаты которого определяются из системы (1.197) после подстановки в нее вместо λ величины λ_0.

Приведем примеры нахождения собственных векторов и соответствующих собственных значений для некоторых операторов.

Пример 1. Найти собственные векторы оператора поворота векторов плоскости R^2 на угол φ.

Решение. Согласно соотношениям (1.127) и (1.193), характеристическое уравнение матрицы этого оператора имеет вид

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2\cos\varphi\lambda+1=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни лишь при $\varphi=n\pi$, $n\in Z$, причем λ равно либо $+1$, либо -1, что соответствует повороту векторов либо на угол $2k\pi$, либо на угол $(2k+1)\pi$, $k\in Z$. Если $\varphi=2k\pi$, то оператор является тождественным, и каждый вектор плоскости, кроме нулевого, является собственным, отвечающим собственному значению $\lambda=1$. При $\varphi=(2k+1)\pi$ оператор есть центральная симметрия, и каждый ненулевой вектор плоскости является, очевидно, собственным с собственным значением $\lambda=-1$.

Пример 2. Найти собственные векторы оператора проектирования векторов пространства R^3 на плоскость XY.

Решение. Так как матрица этого оператора имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то характеристическое уравнение матрицы записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0.$$

Его корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. При $\lambda_1=0$ координаты собственных векторов находим из системы (1.197). Это векторы вида $(0, 0, x_3)$, где $x_3\neq 0$, т.е. векторы,

перпендикулярные к плоскости XY. При $\lambda = 1$ система (1.197) сводится к уравнению $x_3 = 0$, и собственными векторами являются векторы вида $(x_1, x_2, 0)$, где числа x_1 и x_2 одновременно не равны нулю.

Пример 3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1) \times$$

$\times (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$

При $\lambda_1 = 1$, согласно системе (1.197), получаем систему

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -2 & 3 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ 1 & 3 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим, что $x_1 = -x_3$ и $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 = x_3$.

Таким образом, числу λ_1 соответствует вектор $(x_1, x_2, x_3)^T = (-x_3, x_3, x_3)^T = x_3(-1, 1, 1)$, где x_3 — произвольное действительное число. В частности, при $x_3 = 1$ получим собственный вектор $(-1, 1, 1)^T$.

Аналогично для $\lambda_2 = -2$ имеем

$$\begin{bmatrix} 2+2 & -2 & 3 \\ 1 & 1+2 & 1 \\ 1 & 3 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим, что $x_3 = -14x_2$; $x_1 = 11x_2$. Таким образом, получаем собственный вектор вида $(x_1, x_2, x_3)^T = x_2(11, 1, -14)^T$. При $x_2 = 1$ имеем вектор $(x_1, x_2, x_3)^T = (11, 1, -14)^T$.

Для $\lambda_3 = 3$ получаем

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -2 & 3 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 3 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = x_3$, $x_1 = x_2$ или $(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1, x_1, x_1)^T$, т.е. можно считать, что собственный вектор $(x_1, x_2, x_3)^T \parallel (1, 1, 1)^T$.

Таким образом, у данной матрицы A собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$, а соответствующие им нормированные собственные векторы имеют вид

$$\mathbf{x}^1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T; \quad \mathbf{x}^2 = \left(\frac{11}{\sqrt{318}}, \frac{1}{\sqrt{318}}, -\frac{14}{\sqrt{318}}\right)^T;$$

$$\mathbf{x}^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов. Напомним, что самосопряженным линейным оператором в евклидовом пространстве V называется оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий соотношению $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Матрица самосопряженного оператора является симметричной.

Следующие теоремы устанавливают важные свойства собственных векторов самосопряженных операторов.

Теорема 1.29. Собственные векторы самосопряженного оператора (симметричной матрицы), соответствующие различным собственным значениям, попарно-ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ — собственные векторы самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, а λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — соответствующие им собственные значения. Тогда $\lambda_1\mathbf{x}^1 = \mathbf{A}\mathbf{x}^1$ и $\lambda_2\mathbf{x}^2 = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$. Умножим скалярно первое равенство на $\mathbf{x}^2$ и получим $\lambda_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = (\mathbf{A}\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = (\mathbf{x}^1, \mathbf{A}\mathbf{x}^2) = \lambda_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = 0$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $((\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}^1 \perp \mathbf{x}^2)$. ■

Теорема 1.30 (о полноте собственных векторов). У каждого самосопряженного линейного оператора $\mathbf{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве V существует n попарно-ортогональных собственных векторов. Соответствующие им собственные значения являются действительными числами.

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 2$. Полное доказательство теоремы можно найти, например, в учебнике Я. С. Бугрова, С. М. Никольского «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» (М., «Наука», 1980).

Покажем, что у симметричной матрицы собственные значения — действительные числа. В самом деле, характеристическое уравнение симметричной матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{12} = a_{21}$, имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}^2 + a_{11} \cdot a_{22} = 0$. Корни его

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}},$$

очевидно, являются действительными числами. Если подкоренное выражение не равно нулю, то $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и по теореме 1.29 собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны. Если же подкоренное выражение равно нулю, т.е. $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, то $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, т.е. матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Собственными векторами этой матрицы, как не трудно проверить, являются векторы $\mathbf{e}^1 = (1, 0)^T$ и $\mathbf{e}^2 = (0, 1)^T$. ■

Задачи и упражнения.

1. Найти собственные векторы и собственные значения операторов подобия и зеркального отражения.

2. Доказать, что векторы $\mathbf{x}^1 = (2, -2, 1)^T$, $\mathbf{x}^2 = (2, 1, -2)^T$ и $\mathbf{x}^3 = (1, 2, 2)^T$ являются собственными векторами матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти соответствующие им собственные значения.

3. Найти собственные векторы и собственные значения оператора $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1 + x_2 + 8x_3,\ 2x_2,\ x_1 - x_3)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

4. Доказать, что собственные значения ортогональной матрицы по абсолютной величине равны единице.

5. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Доказать, что матрицы $A^T A$ и AA^T имеют одинаковые ненулевые собственные значения.

1.17. ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ

Преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Пусть в $\mathbf{R}^n$ заданы два базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$, которые будем называть старым и новым соответственно. Векторы нового базиса однозначно представляются своими разложениями по векторам старого базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= t_{11}\mathbf{u}^1 + t_{21}\mathbf{u}^2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{u}^n; \\ \mathbf{v}^2 &= t_{12}\mathbf{u}^1 + t_{22}\mathbf{u}^2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{u}^n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{v}^n &= t_{1n}\mathbf{u}^1 + t_{2n}\mathbf{u}^2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{u}^n. \end{aligned}\right\} \qquad (1.199)$$

Матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.200)$$

называется *матрицей перехода* от старого базиса $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ к новому базису $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Из соотношений (1.199) и (1.200) следует, что *столбцами матрицы перехода T являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.*

Матрица T является невырожденной, так как в противном случае ее столбцы, а значит в силу системы (1.199) и векторы $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ были бы линейно-зависимы, что противоречит их выбору в качестве базисных векторов.

Таким образом, для матрицы T существует обратная матрица T^{-1}, которая является, очевидно, матрицей перехода от нового базиса к старому.

Рассмотрим теперь, как связаны координаты одного и того же вектора в старом и новом базисах.

Пусть для вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ имеет место разложение

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}^1 + x_2\mathbf{u}^2 + \ldots + x_n\mathbf{u}^n = x'_1\mathbf{v}^1 + x'_2\mathbf{v}^2 + \ldots + x'_n\mathbf{v}^n. \qquad (1.201)$$

Подставив сюда разложение новых базисных векторов из системы (1.199), получим

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{v}^j = \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}\mathbf{u}^i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j\right)\mathbf{u}^i.$$

Отсюда в силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + \ldots + t_{1n}x_n', \\ x_2 &= t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + \ldots + t_{2n}x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + \ldots + t_{nn}x_n'. \end{aligned}\right\} \qquad (1.202)$$

Таким образом, старые координаты вектора $\mathbf{x}$ получаются из новых его координат по формулам (1.202). Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')^T$, то система (1.202) в матричном виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'. \qquad (1.203)$$

Соотношения (1.202) можно записать и в виде

$$\mathbf{x}' = T^{-1}\mathbf{x}. \qquad (1.204)$$

Формулы (1.202) — (1.204) называются *формулами преобразования координат.*

Пример 1. Пусть вектор $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ имеет координаты (1, —2), т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{u}^1 - 2\mathbf{u}^2$. Найти координаты этого вектора в базисе $\mathbf{v}^1 = \mathbf{u}^1$, $\mathbf{v}^2 = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$.

Р е ш е н и е. Запишем матрицу перехода от базиса $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ к базису $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомые новые координаты x_1', x_2' находим по формуле (1.204):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1' = 3$, $x_2' = -2$.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Выясним, как преобразуется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

Теорема 1.31. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$ и $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ — два базиса в $\mathbf{R}^n$, а T — матрица перехода от старого базиса к новому. Если A — матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}$, то матрицей B этого оператора в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ является матрица

$$B = T^{-1}AT. \qquad (1.205)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, где векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ рассматриваются в базисе $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n$. Если $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ — новый базис и T — матрица перехода, то в силу равенства (1.203) $\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y} = T\mathbf{y}'$, где $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ — векторы в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Подставив $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в равенство $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, получим равенство

$$T\mathbf{y}' = AT\mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{y}' = T^{-1}(AT\mathbf{x}') = (T^{-1}AT)\,\mathbf{x}',$$

справедливое в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Отсюда и следует, что матрица линейного оператора в новом базисе $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ находится по формуле (1.205). ■

Следствие. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса пространства.

В самом деле, $|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| \cdot |A| \cdot |T| = |T|^{-1} \cdot |A| \times |T| = |A|$, так как $|T^{-1}| = |T|^{-1}$.

Матрицы A и $B = T^{-1}AT$ называются *подобными*. Из теоремы 1.31 следует, что подобные матрицы являются матрицами одного и того же линейного оператора $\mathbf{A}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, но рассматриваемого в разных базисах с матрицей перехода T.

Пример 2. В базисе $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ оператор $\mathbf{A}$ имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$. Написать матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{v}^1 = \mathbf{u}^1 + 2\mathbf{u}^2$ $\mathbf{v}^2 = 2\mathbf{u}^1 + 3\mathbf{u}^2$.

Решение. Определяем матрицу перехода T: $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, откуда $T^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда искомая матрица

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.32. Собственные значения подобных матриц совпадают.

Доказательство. В самом деле, характеристический многочлен матрицы B равен: $|B - \lambda E| = |T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| = |T^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = |A - \lambda E|$. ■

Задачи и упражнения.

1. Показать, что линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= -\mathbf{u}^1 + 3\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^3; \\ \mathbf{v}^2 &= -3\mathbf{u}^1 + 5\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^3; \\ \mathbf{v}^3 &= -3\mathbf{u}^1 + 3\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3 \end{aligned}\right\},$$

невырожденное, и найти обратное преобразование.

2. Даны линейные преобразования

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= 2\mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2; \\ \mathbf{v}^2 &= 3\mathbf{u}^1 - 3\mathbf{u}^2 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} \mathbf{w}^1 &= \mathbf{v}^1 - 3\mathbf{v}^2; \\ \mathbf{w}^2 &= 2\mathbf{v}^1 - 4\mathbf{v}^2. \end{aligned}\right\}$$

Найти матрицу преобразования, переводящего вектор $\mathbf{u} = (u^1 \quad u^2)^T$ в вектор $\mathbf{w} = (w^1, w^2)^T$.

3. Векторы $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^3$ и $\mathbf{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^3$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, если

$$\mathbf{u}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{u}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{u}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

4. В базисе 1, t, t^2 пространства многочленов степени не выше двух оператор $\mathbf{A}$ задан матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, образованном многочленами $3t^2 + 2t$; $5t^2 + 3t + 1$; $7t^2 + 5t + 3$.

1.18. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Как следует из теоремы 1.31, матрица линейного оператора зависит от базиса пространства. Как подобрать этот базис, чтобы матрица линейного оператора в нем имела наиболее простой вид? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 1.33. Для того чтобы матрица линейного оператора $\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ в некотором базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из собственных векторов матрицы A.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в некотором базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ диагональная, т.е.

$$A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда, очевидно, справедливы равенства $\mathbf{A}\mathbf{e}^j = \Lambda\mathbf{e}^j = \lambda_j\mathbf{e}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, из которых следует, что λ_j — собственные значения, а $\mathbf{e}^j$ — соответствующие им собственные векторы оператора $\mathbf{A}$.

Достаточность. Предположим, что базис пространства состоит из собственных векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие им собственные значения матрицы A. Тогда $A\mathbf{x}^j = \lambda_j\mathbf{x}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда и из § 1.9 следует, что $A = \Lambda$. ■

Итак, *матрица A будет иметь диагональный вид Λ тогда и только тогда, когда базис пространства $\mathbf{R}^n$ образован собственными векторами оператора* $\mathbf{A}$. Если собственные векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ образуют базис пространства, то столбцами матрицы перехода T к этому базису и являются, очевидно, векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$, поскольку столбцами матрицы перехода T являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Пусть T — матрица, столбцами которой служат собственные векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ оператора $\mathbf{A}$. Тогда, согласно теоремам 1.31 и 1.33, справедливо равенство

$$\Lambda = T^{-1}AT. \tag{1.206}$$

Таким образом, в базисе, состоящем из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, его матрица имеет диагональный вид (1.206), называемый *каноническим*.

Пример 1. Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для этой матрицы в примере 3 § 1.16 найдены собственные векторы $\mathbf{x}^1 = (-1, 1, 1)^T$, $\mathbf{x}^2 = (11, 1, -14)^T$ и $\mathbf{x}^3 = (1, 1, 1)^T$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$. Составим матрицу перехода

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, -2, 3).$$

Канонический вид матрицы самосопряженного оператора. Пусть **A** — самосопряженный оператор. По теореме 1.30 у него существует n попарно-ортогональных собственных векторов. Если эти векторы нормировать и взять в качестве базиса пространства, то в силу теоремы 1.33 матрица оператора **A** в этом базисе будет диагональной. Таким образом, для всякого самосопряженного оператора существует такой ортонормированный базис, что матрица этого оператора имеет в нем диагональный вид. Матрица перехода T к этому базису, очевидно, ортогональная, т.е. $T^{-1} = T^T$. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1.34. Если A — симметричная матрица, то существует ортогональная матрица T, такая, что $T^{-1}AT = T^TAT$ — диагональная матрица.

Из вышеизложенного получаем следующий алгоритм приведения матрицы A к диагональному виду:

1) находим собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы A;

2) составляем матрицу перехода T, столбцами которой служат собственные векторы матрицы A;

3) Находим T^{-1} и по формуле $\Lambda = T^{-1}AT$ получаем искомую диагональную матрицу.

Если A — симметричная матрица, то собственные векторы ее необходимо нормировать, и тогда

$$\Lambda = T^TAT. \tag{1.207}$$

Пример 2. Привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Для $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 4$ находим соответствующие собственные векторы $\mathbf{x}^1 = (1, 1, -2)^T$ и $\mathbf{x}^2 = (2, 0, 1)^T$. Поскольку $\mathbf{x}^3 \perp \mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^3 \perp \mathbf{x}^2$ в силу теоремы 1.30, то в качестве третьего собственного вектора можно взять вектор $\mathbf{x}^3 = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = (1, -5, -2)$. Пронормировав векторы $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x}^3$, получим

$$\mathbf{u}^1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^1\|}\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^2\|}\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^3 = \frac{1}{\|\mathbf{x}^3\|}\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы образуют столбцы матрицы T. Тогда

$$\Lambda = T^T AT = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задачи и упражнения.

1. Найти матрицу, преобразующую данную матрицу к диагональному виду, и указать этот вид:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. В некотором базисе линейный оператор задан матрицей. Найти базис, в котором эта матрица имеет диагональный вид:

а) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.19. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Квадратичная форма и ее матрица. *Квадратичной формой* от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1.208}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ — действительные числа, называемые *коэффициентами квадратичной формы*.

Для записи квадратичной формы в матричном виде из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуем вектор-столбец $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, а из коэффициентов a_{ij} — матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.209}$$

которая называется *матрицей квадратичной формы* и является в силу равенств $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, симметричной.

Учитывая правило умножения матрицы на вектор, в силу равенства (1.110) получаем

$$A\mathbf{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \right)^T.$$

Тогда из условия (1.208) имеем

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) x_i = x_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + \\ + \ldots + x_n \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}),$$

т. е. в матричной записи квадратичная форма (1.208) имеет вид

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}. \qquad (1.210)$$

Таким образом, квадратичная форма полностью определяется своей матрицей, и, наоборот, любая квадратичная форма определяет однозначно симметричную матрицу.

Пример 1. Составить матрицу квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 3x_2^2 + 5x_3^2$.

Решение. Учитывая, что в квадратичной форме коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$, получаем $a_{12} = a_{21} = -1$; $a_{23} = a_{32} = 2$; $a_{13} = a_{31} = 0$; $a_{11} = 0$; $a_{22} = -3$; $a_{33} = 5$, т.е. искомая матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q(x_1, x_2, x_3).$$

Пример 2. Найти квадратичную форму, соответствующую матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Данной матрице соответствует квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_4 - 2x_3^2 + 8x_3x_4 + 5x_4^2$.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Квадратичная форма (1.208) называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Таким образом, канонический вид квадратичной формы следующий:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2. \qquad (1.211)$$

Очевидно, что канонической квадратичной форме соответствует диагональная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}). \qquad (1.212)$$

Нахождение канонического вида квадратичной формы называется *приведением к каноническому виду.*

Теорема 1.35. Любая квадратичная форма с помощью ортогонального преобразования может быть приведена к каноническому виду

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \qquad (1.213)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы квадратичной формы.

Доказательство. Так как матрица A квадратичной формы симметрична, то в силу теоремы 1.34 для нее существует ортогональная матрица T, такая, что выполнено равенство $\Lambda = T^T A T$. Пусть $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, где в соответствии с формулой (1.203) $y_1, y_2, \dots, y_n$ — это координаты $\mathbf{x}$ в новом базисе, состоящем из собственных векторов матрицы A. Тогда из соотношения (1.210) имеем

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T T^T A T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \quad \mathbf{y} = T^T \mathbf{x}. \qquad (1.214)$$

Таким образом, *квадратичная форма в базисе, состоящем из ортонормированных собственных векторов матрицы A, приводится к каноническому виду.* Алгоритм приведения ее к каноническому виду заключается, очевидно, в диагонализации симметричной матрицы формы и последующей записи формы в виде формулы (1.213). ■

Пример 3. Привести к каноническому виду квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_4^2$.

Решение. Выпишем соответствующую этой форме матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = (\lambda + 1)(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Для $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$ находим собственные векторы $\mathbf{x}^1 = (1, 1, 1, 0)^T$ и $\mathbf{x}^2 = (0, -1, 1, 0)^T$ соответственно. Собственные векторы $\mathbf{x}^3$ и $\mathbf{x}^4$, соответствующие собственному значению $\lambda = -1$, найдем из следующих соображений. По теореме 1.30 собственные векторы $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4$ можно выбрать попарно-ортогональными. Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — произвольный вектор, ортогональный $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, то для определения его координат получаем систему

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{x}^1) &= x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}^2) &= -x_2 + x_3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

общее решение которой имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_2 и x_4 — произвольные действительные числа.

Таким образом, любой вектор x, ортогональный $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$, является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}^3 = (-2, 1, 1, 0)^T$ и $\mathbf{x}^4 = (0, 0, 0, 1)^T$. Попарная ортогональность векторов $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$, $\mathbf{x}^4$ очевидна. Тем самым найдены все четыре попарно-ортогональных собственных вектора. Нормируя их, получим векторы

$$\mathbf{u}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые являются столбцами искомой матрицы ортогонального преобразования T, т.е.

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда в силу равенства (1.214) квадратичная форма Q в базисе $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^3$, $\mathbf{u}^4$ приводится к каноническому виду $Q = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

Знакоопределенные квадратичные формы. Квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $Q(\mathbf{x}) > 0$ $(Q(\mathbf{x}) < 0)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Квадратичная форма $Q(\mathbf{x})$ называется *неотрицательно (неположительно) определенной*, если $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ $(Q(x) \leqslant 0)$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Матрица A, соответствующая положительно (отрицательно) определенной форме $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$, называется *положительно (отрицательно) определенной* матрицей. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Например, квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2$ является, очевидно, положительно определенной, а форма $Q(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 5x_2 - x_3)^2 = 16x_1^2 + 25x_2^2 + x_3^2 - 40x_1x_2 - 8x_1x_3 + 10x_2x_3$ — неотрицательно определенной, так как она обращается в нуль при $\mathbf{x} = (x_1, 0, 4x_1)$, $x_1 \neq 0$.

Теорема 1.36. Для того чтобы квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A были положительными (отрицательными).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть квадратичная форма положительно определена. Тогда $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) > 0$. Если λ_i — собственное значение матрицы A, соответствующее собственному вектору $\mathbf{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $Q(\mathbf{x}^i) = (\mathbf{x}^i, A\mathbf{x}^i) = (\mathbf{x}^i, \lambda_i\mathbf{x}^i) = \lambda_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^i) > 0$. Отсюда, так как $(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^i) > 0$, получаем, что $\lambda_i > 0$.

Достаточность. Пусть $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из условия (1.214) следует, что $Q(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Аналогично проводится доказательство для отрицательно определенной квадратичной формы. ■

Следствие. Если квадратичная форма знакоопределена, то матрица ее невырожденная. Определитель матрицы положительно определенной формы больше нуля.

Доказательство. Пусть T — матрица ортогонального преобразования, приводящая квадратичную форму к каноническому виду. Тогда из равенства (1.206) имеем $(\Lambda = T^{-1}AT) \Leftrightarrow (A = T\Lambda T^{-1}) \Rightarrow$ $\Rightarrow |A| = |T| \cdot |\Lambda| \cdot |T^{-1}| = |\Lambda| = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$. Отсюда и из теоремы 1.36 вытекает справедливость данного следствия. ■

Теорема 1.37 (критерий Сильвестра*). Для того чтобы квадратичная форма $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ |A| > 0. \quad (1.215)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть квадратичная форма положительно определена. Тогда в силу следствия из теоремы 1.36 $|A| > 0$. Для вектора $\mathbf{x} = (x_1, 0, \ldots, 0)^T$ имеем $Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{11} > 0$. Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0)^T$, то на основании того же следствия имеем

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Продолжая этот процесс последовательно, получим все соотношения (1.215).

Достаточность. Пусть выполнены соотношения (1.215). Докажем методом индукции, что $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) > 0$.

При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для матриц A_{n-1} порядка $n - 1$. Предположим, что при выполнении этого условия и соотношений (1.215) матрица A неположительно определена. Если T — ортогональная матрица, для которой $T^TAT = \Lambda$, то, положив $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$, получим соотношения (1.214). Так как $|A| =$ $= \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n > 0$, а матрица A, по предположению, неположительно определена, то должно существовать четное число r отрицательных λ_i. Пусть ими будут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Рассмотрим систему уравнений $y_{r+1} =$ $= 0, y_{r+2} = 0, \ldots, y_n = 0, x_n = 0$. Так как $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ связаны соотношениями $\mathbf{x} = T\mathbf{y}, \mathbf{y} = T^T\mathbf{x}$, то мы имеем $n - r + 1$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поэтому существует по крайней мере одно ненулевое решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)^T$. Соответствующее решение $\mathbf{y} = y_1, y_2, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)^T$ в силу невырожденности матрицы T также ненулевое. Но для этих $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеем

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 < 0.$$ Так как $x_n = 0$, то $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x},$ $A_{n-1}\mathbf{x}) < 0$, что противоречит предположению положительной определенности матрицы A_{n-1}. ■

*Дж. Дж. Сильвестр (1814 — 1897) — английский математик.

Замечание 1. Для неотрицательно определенной квадратичной формы определители (1.215) должны быть, очевидно, больше либо равны нулю. Это же справедливо и для собственных значений матриц квадратичной формы.

Замечание 2. Умножая матрицу A на -1, из критерия Сильвестра получаем следующее утверждение: матрица A отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots, \ (-1)^n |A| > 0. \qquad (1.216)$$

Пример 4. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

Решение. Матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для нее $a_{11} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$, $|A| = 1 > 0$.

В соответствии с критерием Сильвестра данная квадратичная форма положительно определена.

Задачи и упражнения.

1. Записать матрицу каждой из квадратичных форм:

а) $2x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$;

б) $4x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - x_1x_2 + 8x_1x_4 - 5x_2x_4$.

2. Записать квадратичную форму по матрице

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Найти ортогональное преобразование, приводящее каждую из квадратичных форм к каноническому виду, и записать этот канонический вид:

а) $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2$;

б) $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;

в) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4. Пусть A и B — положительно определенные матрицы одинаковой размерности, а $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — произвольные действительные числа. Доказать, что матрица $\alpha A + \beta B$ положительно определена.

5. Определить, являются ли следующие матрицы положительно определенными:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

6. Доказать, что если A — положительно определенная матрица, то существует матрица A^{-1}, притом тоже положительно определенная.

1.20. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Канонический вид кривых второго порядка. Из элементарной математики известны такие кривые, как парабола, являющаяся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$; окружность, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$; гипербола — график функции $y = \dfrac{k}{x}$.

Рассмотрим более подробно некоторые замечательные *кривые второго порядка* на плоскости, заданные своими *каноническими уравнениями* в прямоугольной декартовой системе координат:

1) *эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ a\geqslant b); \tag{1.217}$$

2) *гипербола*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0); \tag{1.218}$$

3) *парабола*

$$y^2=2px; \tag{1.219}$$

4) *пара пересекающихся прямых*

$$a^2x^2-b^2y^2=0 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0); \tag{1.220}$$

5) *пара параллельных или совпадающих прямых*

$$x^2-a^2=0 \quad (a\geqslant 0).$$

Выясним некоторые характерные свойства перечисленных кривых.

Эллипс. Из канонического уравнения (1.217) следует, что эллипс симметричен относительно осей X и Y. Если $x=0$, то $y=\pm b$, а при $y=0$ $x=\pm a$. Точки $(\pm a,\ 0)$ и $(0,\ \pm b)$ называются *вершинами эллипса*, точка $(0,\ 0)$ — *центром эллипса*. Далее из уравнения (1.217) следует, что $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$, т.е. эллипс целиком расположен внутри прямоугольника, образованного прямыми линиями $x=\pm a$, $y=\pm b$. Форма эллипса зависит от величины $\frac{b}{a}$, где b называется *меньшей полуосью эллипса*, а a — *большей полуосью эллипса*. При $a=b$ эллипс становится окружностью $x^2+y^2=a^2$.

Обозначим $c^2=a^2-b^2$. Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ называется *эксцентриситетом эллипса*. Очевидно, для эллипса $0\leqslant\varepsilon<1$. Точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$ называются *фокусами эллипса*, а расстояние от фокуса до любой точки M эллипса — *фокальным радиусом* этой точки. Общий вид эллипса изображен на рис. 1.38.

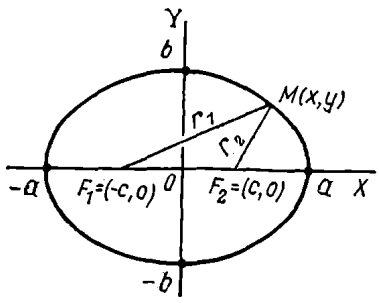


Рис. 1.38

Теорема 1.38. Эллипс есть множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

Доказательство. Пусть $M=(x,\ y)$ — произвольная точка эллипса, а $r_1=|MF_1|$ и $r_2=|MF_2|$ — ее фокальные радиусы (см. рис. 1.38). Учитывая, что $a>b$ и $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, получаем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + a^2 = x^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2;$$

$$r_2^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2.$$

Отсюда $r_1 + r_2 = \left|\frac{cx}{a} + a\right| + \left|a - \frac{cx}{a}\right| = 2a$, так как $\left(a \pm \frac{c}{a}x\right) > 0$. ■

Гипербола. Рассмотрим каноническое уравнение гиперболы (1.218). Так как оно содержит только квадраты x и y, то отсюда следует, что оси координат X и Y являются осями симметрии для гиперболы. Если $y = 0$, то $x = \pm a$. Точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ называются *вершинами гиперболы*. С осью Y гипербола не пересекается, поскольку при $x = 0$ имеет $y^2 = -b^2$, что невозможно. Оси симметрии гиперболы называются *главными осями гиперболы*, а центр симметрии — точка $(0, 0)$ — *центром гиперболы*. Ось X называется *действительной осью* гиперболы, а ось Y — *мнимой*. Из уравнения (1.218) следует, что $x^2 \geqslant a^2$, т.е. $|x| \geqslant a$, а это означает, что гипербола расположена левее прямой $x = -a$ и правее прямой $x = a$. Таким образом, она состоит из двух изолированных ветвей.

Рассмотрим прямые, удовлетворяющие уравнениям

$$Y = \pm \frac{bx}{a}. \tag{1.221}$$

Так как для точек гиперболы $y = \pm\frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$, то в силу уравнений (1.221) получаем

$$|Y - y| = \left|\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right| = \frac{b}{a}\left|x - \sqrt{x^2 - a^2}\right| = \frac{ab}{\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|}.$$

Отсюда при $x \to \pm\infty$ разность $|Y - y| = \frac{ab}{\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|}$ монотонно убывает и стремится к нулю, т.е. стремится к нулю расстояние между точкой $M = (x, y)$ гиперболы и точкой $M_1 = (x, Y)$ прямой (1.221). Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы* (рис. 1.39). Обозначим $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$. Величина ε называется *эксцентриситетом гиперболы*. Точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$ называются *фокусами гиперболы*, а величины $r_1 = |MF_1|$ и $r_2 = |MF_2|$ — *фокальными радиусами* произвольной точки M.

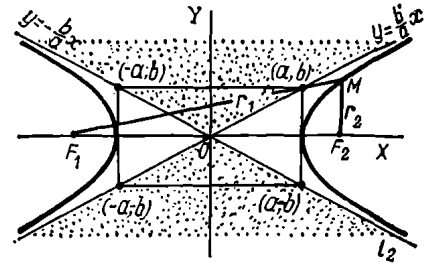


Рис. 1.39

Теорема 1.39. Гипербола есть множество точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

Доказательство. Пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка гиперболы с фокальными радиусами r_1 и r_2 (см. рис. 1.39). Так как для точек гиперболы $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, то

$$r_1^2=(c+x)^2+y^2=c^2+2cx+x^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2;$$

$$r_2^2=(c-x)^2+y^2=\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2.$$

Поскольку для всех точек гиперболы $|x|\geqslant a$ и $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$, имеем

$$r_1=\left|\frac{cx}{a}+a\right|=\begin{cases}\frac{cx}{a}+a, & x>0;\\ -\frac{cx}{a}-a, & x<0;\end{cases}$$

$$r_2=\left|\frac{cx}{a}-a\right|=\begin{cases}\frac{cx}{a}-a, & x>0;\\ -\frac{cx}{a}+a, & x<0.\end{cases}$$

Отсюда $|r_1-r_2|=2a$. ■

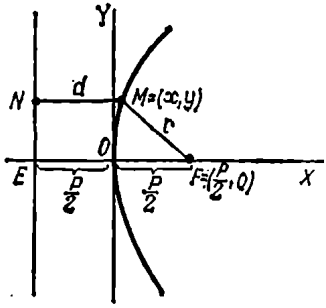


Рис. 1.40

Парабола. Из канонического уравнения параболы (1.219) следует, что точки (x, y) и $(x, -y)$ принадлежат ей, т.е. парабола симметрична относительно оси X. Точка $(0, 0)$ пересечения параболы с осью X называется *вершиной параболы*. Если $p>0$ ($p<0$), то парабола $y^2=2px$ расположена правее (левее) оси Y. Точка $F=\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется *фокусом параболы*, а расстояние $r=|MF|$ — *фокальным радиусом* точки M параболы. Парабола $y^2=2px$, $p>0$, изображена на рис. 1.40.

Теорема 1.40. Парабола есть множество точек $M=(x, y)$ плоскости, равноудаленных от фиксированной точки F и фиксированной прямой $x=\frac{p}{2}$, называемой *директрисой параболы*.

Доказательство. Для любой точки $M=(x, y)$ параболы имеем

$$|MF|^2=r^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=$$

$$=d^2=|MN|^2.\ \blacksquare$$

Пара пересекающихся прямых. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то уравнение (1.220) определяет пару пересекающихся прямых. В самом деле, из этого уравнения имеем $(ax - by)(ax + by) = 0$, откуда следует, что либо $ax - by = 0$, либо $ax + by = 0$. Каждое из этих уравнений есть уравнение прямой, проходящей через начало координат.

Геометрические приложения квадратичных форм к исследованию кривых второго порядка. Пусть на плоскости в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задана кривая, определяемая уравнением второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1.222)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} — действительные числа. Уравнение (1.222) называется *общим уравнением кривой второго порядка.*

Попытаемся найти прямоугольную систему координат, в которой кривая, заданная уравнением (1.222), имеет наиболее простой вид.

Рассмотрим квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, определяемую уравнением (1.222), и запишем ее матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Для этого найдем собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A и соответствующие им нормированные собственные векторы $\mathbf{v}^1 = (\alpha_1, \beta_1)^T$, $\mathbf{v}^2 = (\alpha_2, \beta_2)^T$, $\|\mathbf{v}^i\| = 1$, $i = 1, 2$.

Введем обозначения $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$; $T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$, где T — ортогональная матрица. Тогда уравнение (1.222) можно записать в виде

$$(A\mathbf{z}, \mathbf{z}) + (\mathbf{z}, \mathbf{g}) + a_{33} = 0. \qquad (1.223)$$

Введем замену

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \qquad (1.224)$$

Тогда уравнение (1.223), согласно равенству (1.214), преобразуется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + x'(\mathbf{v}^1, \mathbf{g}) + y'(\mathbf{v}^2, \mathbf{g}) + a_{33} = 0. \qquad (1.225)$$

Итак, с помощью ортогональной матрицы T мы перешли от старого ортонормированного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ к новому ортонормированному базису, порожденному собственными векторами $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ матрицы A. В новом базисе уравнение (1.222) имеет вид (1.225).

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Уравнение (1.225) преобразуем следующим образом:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2x' \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{2\lambda_1} + \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2y' \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2} + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})^2}{4\lambda_2^2} \right) +$$

$$+ a_{33} - \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})^2}{4\lambda_1} - \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})^2}{4\lambda_2} = \lambda_1 \left(x' + \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{2\lambda_1} \right)^2 +$$

$$+ \lambda_2 \left(y' + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2} \right)^2 + c = 0.$$

Введя новые переменные

$$\bar{x} = x' + \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{2\lambda_1};\ \bar{y} = y' + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2};\ \left(c = \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})^2}{4\lambda_1} + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})^2}{4\lambda_2} - a_{33}\right), \tag{1.226}$$

получим уравнение

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = c,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0. \tag{1.227}$$

Преобразование (1.226) переносит начало координат нового базиса в точку $\left(-\frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{2\lambda_1}, -\frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2}\right)$. Если в равенстве (1.227) $c < 0$, то ни одна точка $(\bar{x}, \bar{y})$ не удовлетворяет этому уравнению. Такая «кривая» называется *мнимым эллипсом*. Если $c = 0$, то уравнение (1.227) удовлетворяет единственная точка O (0, 0). Эта «кривая» называется *вырожденным эллипсом*. Если же $c > 0$, то уравнение (1.227) преобразуется к виду $\frac{\bar{x}^2}{c/\lambda_1} + \frac{\bar{y}^2}{c/\lambda_2} = 1$. Положив здесь $\frac{c}{\lambda_1} = a^2$; $\frac{c}{\lambda_2} = b^2$, получим каноническое уравнение эллипса $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$.

Замечание. Случай $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ сводится к рассмотренному выше умножением уравнения (1.227) на -1.

2. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = -\mu_2$, $\mu_2 > 0$. Тогда уравнение (1.227) преобразуется к виду

$$\lambda_1\bar{x}^2 - \mu_2\bar{y}^2 = c,\ \lambda_1 > 0,\ \mu_2 > 0, \tag{1.228}$$

где $c = \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{4\lambda_1} - \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{4\mu_2} - a_{33}$. Если $c = 0$, то уравнение (1.228) задает пару пересекающихся прямых $\sqrt{\lambda_1}\,\bar{x} - \sqrt{\mu_2}\,\bar{y} = 0$ и $\sqrt{\lambda_1}\,\bar{x} + \sqrt{\mu_2}\,\bar{y} = 0$. Если $c > 0$, то уравнение (1.218) приводится к виду $\frac{\bar{x}^2}{c/\lambda_1} - \frac{\bar{y}^2}{c/\mu_2} = 1$. Введя обозначения $a^2 = \frac{c}{\lambda_1}$; $b^2 = \frac{c}{\mu_2}$, получим каноническое уравнение гиперболы $\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$.

Случай $c < 0$ исследуется аналогично.

3. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда уравнение (1.225) имеет вид

$$\lambda_2\left(y' + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2}\right)^2 + x'(\mathbf{v}^1, \mathbf{g}) + a_{33} - \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{4\lambda_2} = 0.$$

Отсюда, обозначив $y = y' + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2}$, $x = x'(\mathbf{v}^1, \mathbf{g}) + a_{33} - \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{4\lambda_2}$, получим каноническое уравнение параболы: $\lambda_2\bar{y}^2 + \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{y}^2 = 2p\bar{x}$, $p = -\frac{1}{2\lambda_2}$.

Если $(\mathbf{v}^1, \mathbf{g}) = 0$, то получим пару параллельных прямых или *мнимую кривую*, т. е. кривую вида $y^2 = -a^2$.

Таким образом, доказано, что если:

1) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то уравнение (1.222) определяет *кривую эллиптического типа* (либо действительный эллипс, либо вырожденный эллипс, либо мнимый эллипс);

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то уравнение (1.222) определяет *кривую гиперболического типа* (либо гиперболу, либо пару пересекающихся прямых);

3) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, то уравнение (1.222) определяет *кривую параболического типа* (либо параболу, либо пару параллельных прямых, либо мнимую кривую).

Сформулируем теперь алгоритм приведения кривой, заданной уравнением (1.222) к каноническому виду.

1. Выписываем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

2. Находим нормированные собственные векторы $\mathbf{v}^1$ и $\mathbf{v}^2$ и собственные значения λ_1 и λ_2 этой матрицы.

3. Составляем матрицу T, столбцами которой служат векторы $\mathbf{v}^1$ и $\mathbf{v}^2$:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1, \ i = 1, 2.$$

4. Вводим новую систему координат по формулам (1.224)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y'; \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{cases} \tag{1.229}$$

Преобразование системы (1.229) осуществляет поворот осей координат.

5. Переменные x и y из системы (1.229) подставляем в уравнение (1.222), при этом в нем исчезнет член с произведением xy.

6. В полученном новом уравнении вида (1.225) выделяем полные квадраты и вводим новые переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по формулам (1.226), чем фактически осуществляем перенос системы координат (X', Y') в некоторое новое начало. При этом уравнение (1.222) принимает канонический вид.

7. Строим все системы координат (X, Y), (X', Y'), $(\overline{X}, \overline{Y})$ и в последней системе — искомую кривую.

Пример 1. Привести к каноническому виду кривую, заданную уравнением

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}\,x + 20 = 0, \tag{1.230}$$

и построить ее.

Решение. 1. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Решая характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$, находим собственные значения $\lambda_1 = 20$ и $\lambda_2 = 5$ и соответствующие собственные векторы $\mathbf{v}^1 = (2, 1)^T$ и $\mathbf{v}^2 = (-1, 2)^T$.

3. Составляем матрицу T. Нормируя $\mathbf{v}^1$ и $\mathbf{v}^2$, имеем

$$T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

4. В соответствии с системой (1.229) вводим новые переменные x', y' по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} y'; \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y'. \end{cases}$$

5. Подставив x и y в уравнение (1.230), получим уравнение

$$4x'^2 + y'^2 + 8x' - 4y' + 4 = 0.$$

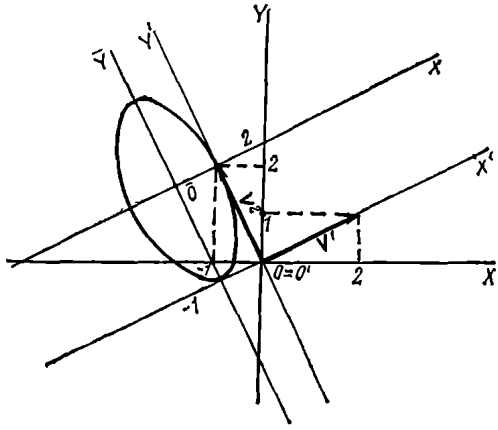


Рис. 1.41

6. Выделив полные квадраты, имеем

$$4(x' + 1)^2 + (y' - 2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x' + 1)^2}{1} + \frac{(y' - 2)^2}{4} = 1.$$

Положив здесь $\bar{x} = x' + 1$, $\bar{y} = y' - 2$, получим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{\bar{x}^2}{1} + \dfrac{\bar{y}^2}{4} = 1$ в системе координат $(\bar{X}, \bar{Y})$ (рис. 1.41).

Задачи и упражнения.

1. Доказать, что уравнение $2a_{12}xy + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$ определяет кривую, относящуюся к гиперболическому типу. В каком случае это уравнение определяет гиперболу?

2. Доказать, что для эллипса $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, где ε — эксцентриситет.

3. Показать, что фокальный радиус параболы может быть вычислен по формуле $r = x + \dfrac{p}{2}$.

4. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F = (2, -1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

5. Составить уравнение гиперболы, если уравнение ее асимптот $y = \pm \dfrac{12}{5} x$, а расстояние между ее вершинами равно 48.

6. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

7. Привести уравнение к каноническому виду и построить кривую, определяемую каждым из данных уравнений:

а) $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$;

б) $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}\,x + 4\sqrt{13}\,y + 13 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 36 = 0$;

г) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

д) $y = \dfrac{k}{x}$.

1.21. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Канонический вид поверхностей второго порядка. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ определена прямоугольная декартова система координат. Множество точек $M = (x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{11}x + \\ + a_{24}y + a_{34}z + a_{14} = 0, \qquad (1.231)$$

где a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, — действительные числа, называется *поверхностью второго порядка*. В общем случае *поверхностью* в $\mathbf{R}^3$ называется множество точек $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, удовлетворяющих некоторому уравнению $F(x, y, z) = 0$. При этом уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением этой поверхности. Говорят, что точка $M = (x, y, z)$ лежит на поверхности, если ее координаты удовлетворяют ее уравнению.

Рассмотрим частные случаи поверхностей второго порядка, заданных своими каноническими уравнениями:

1) *эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0; \qquad (1.232)$$

2) *однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0; \qquad (1.233)$$

3) *двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0; \qquad (1.234)$$

4) *конус второго порядка*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0; \qquad (1.235)$$

5) *эллиптический параболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz,\ a > 0,\ b > 0; \qquad (1.236)$$

6) *гиперболический параболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz,\ a > 0,\ b > 0; \tag{1.237}$$

7) *точка* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

8) *цилиндры второго порядка: эллиптический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0; \tag{1.238}$$

гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0; \tag{1.239}$$

параболический цилиндр

$$y^2 = 2px; \tag{1.240}$$

пара пересекающихся плоскостей $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$, $a > 0$, $b > 0$;

пара параллельных или совпадающих плоскостей $x - a = 0$, $a \geqslant 0$;

прямая $x^2 + y^2 = 0$.

Изучим некоторые характерные свойства перечисленных выше поверхностей, заданных своими каноническими уравнениями.

Эллипсоид. Из уравнения (1.232) следует, что эллипсоид является симметричной поверхностью относительно координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ и относительно начала координат. При $a = b = c$ эллипсоид превращается в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Из уравнения (1.232) следует также, что $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ и $|z| \leqslant c$. Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ лежат на эллипсоиде и называются его *вершинами*.

Для более точного представления о форме эллипсоида произведем сечение плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, в сечении эллипсоида плоскостью $z = h\ (|h| \leqslant c)$ получим эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$ с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. С координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ эллипсоид пересекается по эллипсам $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ соответственно. Эллипсоид, заданный уравнением (1.232), изображен на рис. 1.42.

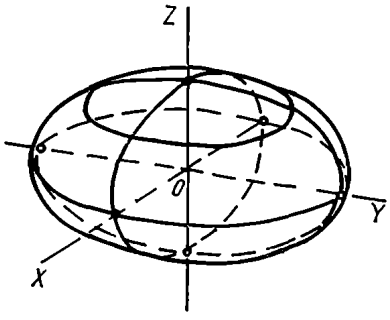


Рис. 1.42

Гиперболоиды. Однополостный гиперболоид, заданный уравнением (1.233), пересекается с координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ по гиперболам $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и эллипсу

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ соответственно (рис. 1.43). Из уравнения (1.233) вытекает, что в сечениях однополостного гиперболоида плоскостями $z = h$ всегда получаются эллипсы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$ с полуосями $a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$.

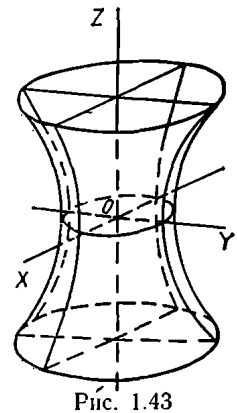


Рис. 1.43

Пересекая двуполостный гиперболоид, точки которого удовлетворяют уравнению (1.234), плоскостью $x = h\,(|h| \geqslant a)$, получим в сечении эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + \frac{h^2}{a^2}$ с полуосями $b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$ и $c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$. При $h = a$ получим в сечении точки $(\pm a, 0, 0)$, называемые *вершинами двуполостного гиперболоида.* В сечениях двуполостного гиперболоида координатными плоскостями $z = 0$ и $y = 0$ получим гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ соответственно (рис. 1.44).

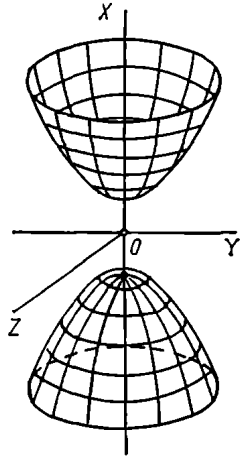


Рис. 1.44

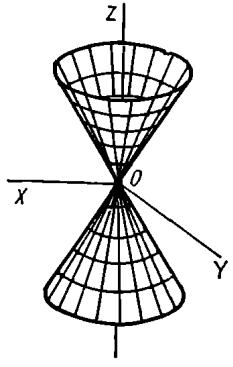


Рис. 1.45

Конус второго порядка. Пересекая поверхность конуса, заданного уравнением (1.235), плоскостью $z = h$, получим эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$. В сечении конуса плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ имеем пары пересекающихся прямых $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ соответственно. Конус второго порядка изображен на рис. 1.45.

Параболоиды. Если пересечь поверхность эллиптического параболоида, заданного уравнением (1.236), плоскостью $z = h$, $h \geqslant 0$, то в

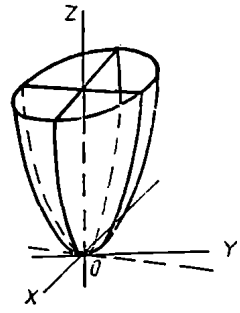


Рис. 1.46

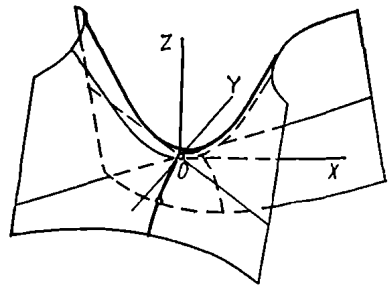


Рис. 1.47

сечении получим эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ph$, $p>0$, с полуосями $a\sqrt{2ph}$ и $b\sqrt{2ph}$. В сечении же плоскостью $z=0$ имеем точку $O=(0,\ 0,\ 0)$, называемую *вершиной эллиптического параболоида.* Данная поверхность пересекается плоскостями $x=0$ и $y=0$ по параболам $y^2=2pb^2z$ и $x^2=2pa^2z$ соответственно. Эллиптический параболоид изображен на рис. 1.46.

Пересекая гиперболический параболоид, заданный уравнением (1.237), плоскостью $z=h$, получим гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ph$. При $h=0$ в сечении имеем пару пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. С плоскостями $x=0$ и $y=0$ гиперболический параболоид пересекается по параболам $y^2=-2pb^2z$ и $x^2=2pa^2z$ соответственно. Эта поверхность изображена на рис. 1.47.

Цилиндры второго порядка. Эллиптический цилиндр с уравнением (1.238) на плоскости XY определяет эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, который называется *направляющей линией цилиндра.* Любая плоскость $z=h$ пересекает рассматриваемый цилиндр по этому же эллипсу. Это значит, что если точка $(x,\ y)$ лежит на эллипсе, то точка $(x,\ y,\ z)$ при любом z лежит на поверхности эллиптического цилиндра (рис. 1.48). Прямые, параллельные оси Z и пересекающие направляющую линию (эллипс), называются *образующими цилиндра.*

Направляющими линиями гиперболического и параболического цилиндров с уравнениями (1.239) и (1.240) соответственно являются гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и парабола $y^2=2px$, а образующими служат прямые, параллельные оси Z и проходящие через указанные гиперболу и параболу. Эти поверхности изображены на рис. 1.49 и рис. 1.50 соответственно.

Анализ взаимного расположения пересекающихся плоскостей $a^2x^2-b^2y^2=0$, параллельных или совпадающих плоскостей $x^2-a^2=0$, а также прямой $x^2+y^2=0$ (оси Z) не представляет труда.

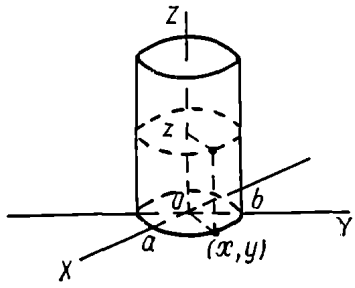


Рис. 1.48

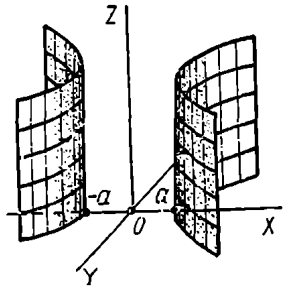


Рис. 1.49

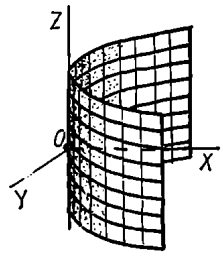


Рис. 1.50

Геометрические приложения квадратичных форм к исследованию поверхностей второго порядка в $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим теперь общее уравнение поверхности второго порядка (1.231). Попытаемся выбрать в $\mathbf{R}^3$ ортонормированный базис и начало координат так, чтобы поверхность (1.231) в системе координат имела канонический вид. Приведение поверхности, заданной уравнением (1.231), к каноническому виду проводится точно так же, как и для кривых второго порядка.

Рассмотрим квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$, определяемую уравнением (1.231), матрица которой

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Находим собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 и соответствующие нормированные собственные векторы $\mathbf{v}^1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$, $\mathbf{v}^2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$ и $\mathbf{v}^3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$ этой матрицы. Составляем матрицу перехода от старого базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ к новому базису $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Вводим новые переменные по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'; \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'; \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{cases} \tag{1.241}$$

Обозначив $\mathbf{g} = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ и подставив соотношения (1.241) в уравнение (1.231), получим уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + (\mathbf{v}^1, \mathbf{g})\, x' + (\mathbf{v}^2, \mathbf{g})\, y' + (\mathbf{v}^3, \mathbf{g})\, z' + a_{44} = 0. \tag{1.242}$$

Итак, если в пространстве $\mathbf{R}^3$ базисом служат собственные ортонормированные векторы $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$ матрицы A, то уравнение (1.231) в нем приводится к уравнению (1.242). Исследуем возможные случаи.

1. Пусть все собственные числа λ_1, λ_2, λ_3 не равны нулю и

имеют один и тот же знак. Выделяя полные квадраты, приведем уравнение (1.242) к виду

$$\lambda_1\left(x' + \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{(\mathbf{v}^3, \mathbf{g})}{2\lambda_3}\right)^2 = d, \quad (1.243)$$

где $d = \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})^2}{4\lambda_1} + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})^2}{4\lambda_3} + \frac{(\mathbf{v}^3, \mathbf{g})^2}{4\lambda_3} - a_{44}$. Введем новые переменные по формулам

$$\bar{x} = x' + \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})}{2\lambda_1}, \quad \bar{y} = y' + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})}{2\lambda_2}, \quad \bar{z} = z' + \frac{(\mathbf{v}^3, \mathbf{g})}{2\lambda_3}. \quad (1.244)$$

Тогда из равенства (1.243) получим уравнение

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \lambda_3\bar{z}^2 = d. \quad (1.245)$$

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ и $d < 0$, то не существует действительных точек $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, удовлетворяющих уравнению (1.245). Такая «поверхность» называется *мнимым эллипсоидом*. Если же $d = 0$, то уравнение (1.245) определяет единственную точку $\bar{0} = (0, 0, 0)$. Такой эллипсоид называется *вырожденным*. При $d > 0$ получаем уравнение эллипсоида $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1$, где $a^2 = \frac{d}{\lambda_1}$; $b^2 = \frac{d}{\lambda_2}$; $c^2 = \frac{d}{\lambda_3}$.

2. Предположим, что собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A отличны от нуля и одно из них имеет знак, противоположный знаку двух других. Пусть в уравнении (1.245) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, $d > 0$. Положив $a^2 = \frac{d}{\lambda_1}$; $b^2 = \frac{d}{\lambda_2}$; $c^2 = \frac{d}{-\lambda_3}$, $\lambda_3 < 0$, из уравнения (1.245) получим уравнение однополостного гиперболоида $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1$. Если $d = 0$, то из равенства (1.245) имеем уравнение конуса второго порядка $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 0$, где $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$; $b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$; $c^2 = -\frac{1}{\lambda_3}$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $d > 0$. Обозначив $a^2 = \frac{d}{\lambda_1}$; $b^2 = \frac{d}{-\lambda_2}$; $c^2 = \frac{d}{-\lambda_3}$, из уравнения (1.245) получим каноническое уравнение двуполостного гиперболоида в виде $\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1$.

3. Предположим, что одно из собственных чисел λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A, например λ_3, равно нулю. Тогда уравнение (1.242) преобразуется к виду

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + (\mathbf{v}^3, \mathbf{g})\bar{z} = d, \quad (1.246)$$

где $d = \frac{(\mathbf{v}^1, \mathbf{g})^2}{4\lambda_1} + \frac{(\mathbf{v}^2, \mathbf{g})^2}{4\lambda_2} - a_{44}$.

Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $d = 0$, $(\mathbf{v}^3, \mathbf{g}) < 0$. Обозначив $d^2 = -\frac{(\mathbf{v}^3, \mathbf{g})}{2\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{(\mathbf{v}^3, \mathbf{g})}{2\lambda_2}$, получим каноническое уравнение эллиптического параболоида

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 2\bar{z}.$$

При $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $d = 0$, $(\mathbf{v}^3, \mathbf{g}) < 0$ из уравнения (1.246) имеем уравнение гиперболического параболоида $\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 2\bar{z}$.

Если $(\mathbf{v}^3, \mathbf{g}) = 0$, то из уравнения (1.246) получим либо эллиптический цилиндр $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = d$ ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $d > 0$), либо гиперболический цилиндр $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = d$ ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), либо пару прямых $\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = 0$ ($\lambda_1\lambda_2 < 0$, $d = 0$). Если одно из чисел λ_1 или λ_2 равно нулю, то уравнение (1.246), очевидно, определяет соответствующий параболический цилиндр.

Поверхности вращения. Поверхность S называется *поверхностью вращения*, если она вместе с каждой своей точкой содержит и всю окружность, полученную вращением этой точки вокруг некоторой фиксированной прямой L, называемой *осью вращения*.

Пусть на плоскости YZ задана кривая линия L уравнением $F(y, z) = 0$. Найдем уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой L вокруг оси Z.

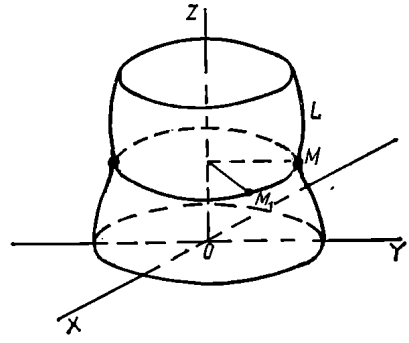


Рис. 1.51

В плоскостях сечений, перпендикулярных к оси Z, образуется окружность некоторого радиуса R, причем каждая ее точка лежит на поверхности вращения (рис. 1.51). Пусть $M = (0, y, z)$, $P = (0, 0, z)$, $M_1 = (X, Y, Z)$ и $z = Z$. Тогда искомый радиус окружности $R = |y| = |M_1P| = \sqrt{X^2 + Y^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$. Подставляя это значение y в уравнение линии L, получим искомое уравнение поверхности вращения в виде $F\left(\pm\sqrt{X^2 + Y^2}, Z\right) = 0$, при этом знак выбирается такой, чтобы в соответствующих точках он совпадал со знаком ординаты y кривой L.

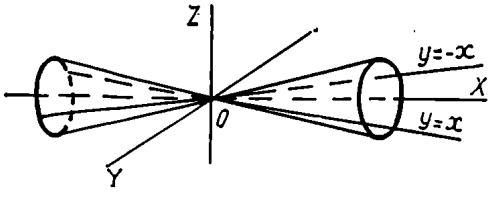


Рис. 1.52

Пример 1. Составить уравнение поверхности вращения прямой линии $y = x$ вокруг оси X.

Решение. Очевидно, при таком вращении получится поверхность конуса второго порядка (рис. 1.52). Так как вращение происходит вокруг оси X, то в уравнении $y = x$ заменяем y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. В результате получим $(\pm\sqrt{y^2+z^2} = x) \Rightarrow (x^2 - y^2 - z^2 = 0)$ — искомое уравнение конуса.

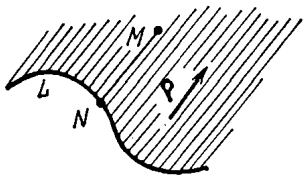


Рис. 1.53

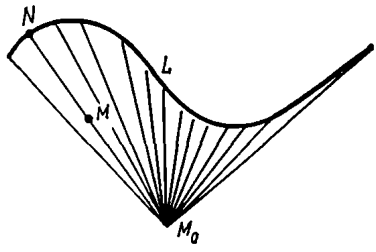


Рис. 1.54

Цилиндрические поверхности. Поверхность S называется *цилиндрической*, если она вместе с каждой точкой M содержит прямую, проходящую через M параллельно данному вектору $\mathbf{p}$ и пересекающую данную линию L, называемую *направляющей* (рис. 1.53). Вектор $\mathbf{p}$ называется *направляющим вектором* цилиндрической поверхности, а параллельные ему прямые, принадлежащие поверхности, — *образующими*.

Составим уравнение цилиндрической поверхности с направляющей линией $f(x, y) = 0$ и направляющим вектором $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

Пусть $M = (X, Y, Z)$ — произвольная точка на искомой поверхности, а $N = (x, y, 0)$ — соответствующая точка направляющей $f(x, y) = 0$ (см. рис. 1.53). Составляем каноническое уравнение образующих, параллельных вектору $\mathbf{p}$: $\frac{X-x}{p_x} = \frac{Y-y}{p_y} = \frac{Z-z}{p_z}$. Исключая из этих уравнений и уравнения $f(x, y) = 0$ переменные x и y, получим уравнение искомой цилиндрической поверхности.

Замечание. Если $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$, то образующие имеют вид $\frac{X-x}{0} = \frac{Y-y}{0} = \frac{Z}{1} \Rightarrow (x = X, y = Y)$. Таким образом, $f(X, Y) = 0$ — уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Z, и направляющей линией $f(x, y) = 0$.

Конические поверхности. Пусть в $\mathbf{R}^3$ дана точка M_0 и кривая L, не проходящая через эту точку. Поверхность, образованная всеми прямыми, проведенными через точку M_0 и пересекающими линию L, называется *конической поверхностью* (рис. 1.54), при этом точка M_0 называется *вершиной конической поверхности*, а линия L — *направляющей* этой поверхности.

Пусть направляющая L задана пересечением двух поверхностей $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, т. е. точки $(x, y, z) \in L$ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям. Составим уравнение конической поверхности с направляющей L и вершиной $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Для этого запишем уравнения образующих конической поверхности $\frac{X-x}{x-x_0} = \frac{Y-y}{y-y_0} = \frac{Z-z}{z-z_0}$, где $M = (X, Y, Z)$ — точка поверхности, а $N = (x, y, z)$ — соответствующая точка направляющей L (см. рис.

1.54). Исключая из уравнений образующей и направляющей переменные x, y, z, получаем искомое уравнение конической поверхности.

Задачи и упражнения.

1. Привести к каноническому виду уравнения следующих поверхностей:
а) $2x^2 + 5y^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$;
в) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x + 24y + 30 = 0$.

2. Написать уравнения поверхностей, образованных вращением вокруг оси Z следующих кривых, расположенных в плоскости YZ:
а) эллипса $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; б) гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$;
в) гиперболы $\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$; г) параболы $y^2 = 2pz$.

3. Доказать, что если $F(tx, ty, tz) = t^\alpha F(x, y, z)$, $\forall t \in \mathbf{R}$, то множество точек $M = (x, y, z)$, для которых $F(x, y, z) = 0$, образует коническую поверхность с вершиной в начале координат ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Действительные числа и числовая ось. Напомним некоторые известные из элементарной математики сведения из теории действительных чисел.

Пусть L — числовая ось, т. е. прямая, на которой выбрано начало O, масштаб и направление (рис. 2.1). Известно, что каждому действительному числу r соответствует единственная точка числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число r, т. е. между действительными числами и точками числовой оси L устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Действительные числа обладают свойством упорядоченности: если a и b — произвольные действительные числа, то либо $a=b$, либо $a<b$, либо $a>b$, причем имеет место только одно из этих соотношений. Точки, изображающие действительные числа, располагаются на числовой оси L по возрастанию этих чисел: если $a<b$, то A располагается левее B (или B располагается правее A).

Если дополнить множество действительных чисел $\mathbf{R}$ двумя элементами, обозначенными через $+\infty$ и $-\infty$ и называемыми соответственно «плюс и минус бесконечностями», то получим расширенную числовую прямую $\overline{\mathbf{R}}$, причем, по определению, выполняются соотношения:

а) $-\infty<x<+\infty$, $x+\infty=+\infty$, $x-\infty=-\infty$, $\forall x\in\mathbf{R}$;
б) $x(+\infty)=+\infty$, $x(-\infty)=-\infty$, $\forall x>0$;
в) $x(+\infty)=-\infty$, $x(-\infty)=+\infty$, $\forall x<0$.

Кроме того, по определению, $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$, $(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$. Операции же $(+\infty)+(-\infty)$ и $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ не определены.

Модуль действительного числа. *Модулем действительного числа* называется неотрицательное число, определяемое следующим условием

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Из определения модуля следует, что $x\leqslant|x|$ и $-x\leqslant|x|$. Таким образом, если ε — произвольное положительное число, то неравенство

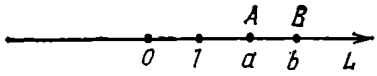


Рис. 2.1

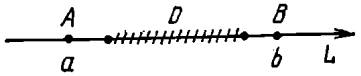


Рис. 2.2

$|x| \leqslant \varepsilon$ равносильно двум неравенствам $x \leqslant \varepsilon$ и $-x \leqslant \varepsilon$ или же $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$, т. е.

$$(|x| \leqslant \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon) \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{2.2}$$

Отметим некоторые свойства модуля действительных чисел.

Пусть a и b — произвольные действительные числа. Тогда имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}
&1^\circ.\ |ab| = |a| \cdot |b|.\\
&2^\circ.\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ (b \neq 0).\\
&3^\circ.\ |a+b| \leqslant |a| + |b|.\\
&4^\circ.\ ||a| - |b|| \leqslant |a-b|.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Докажем свойства 3° и 4°.

Так как $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, то, сложив почленно эти неравенства, получим $-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant (|a|+|b|) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Свойство 4° вытекает из равенства 3°, если заметить, что

$$|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leqslant |a-b|$$

и

$$|b| = |b-a+a| \leqslant |b-a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leqslant |b-a| = |a-b|.$$

Из этих соотношений и следует справедливость свойства 4°.

Ограниченные множества. Множество $D \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число b, что $x \leqslant b$, $\forall x \in D$. Аналогично множество D называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $a \in \mathbf{R}$, что $x \geqslant a$, $\forall x \in D$. Множество D называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу, т. е. существуют два действительных числа a и b, таких, что

$$a \leqslant x \leqslant b,\ \forall x \in D. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) показывает, что множество D ограничено в том и только в том случае, если оно расположено на некотором конечном отрезке AB числовой прямой L (рис. 2.2, множество D выделено).

Очевидно, множество, состоящее из конечного числа точек, всегда ограничено.

Легко показать, что множество D ограничено тогда и только тогда, когда существует положительное число c, такое, что

$$|x| \leqslant c,\ \forall x \in D \Leftrightarrow -c \leqslant x \leqslant c,\ \forall x \in D. \tag{2.5}$$

В самом деле, пусть $|x| \leqslant c$, $c > 0$. Тогда $-c \leqslant x \leqslant c$, т. е. множество D ограничено ($a = -c$, $b = c$). Наоборот, если $a \leqslant x \leqslant b$, то,

положив $c = \max\{|a|, |b|\}$, получим $-c \leqslant -|a| \leqslant a$, $b \leqslant |b| \leqslant c$. Отсюда $-c \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant c$, т. е. $-c \leqslant x \leqslant c$, $\forall x \in D$.

Примером ограниченного сверху множества может служить множество отрицательных чисел. Множество натуральных чисел, очевидно, ограничено снизу любым числом $a \leqslant 1$. Множество $[a, b]$, где a и b — любые действительные числа, $a < b$, является примером ограниченного множества.

Множество, не ограниченное сверху или снизу, называется *неограниченным*. Другими словами, множество D действительных чисел неограничено, если $(\forall M > 0)$, $(\exists x^* \in D) : |x^*| > M$. Например, множество **Z** целых чисел неограниченное, так как $(\forall M > 0)$ $(\exists x^* \in \mathbf{Z}) : |x^*| > M$, причем $x^* = [M] + 1$, где $[M]$ — целая часть M.

Неограниченными множествами являются также так называемые бесконечные интервалы или полуинтервалы: $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, являющиеся множествами действительных чисел, определяемые соотношениями $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant b$, $-\infty < x < b$, $a < x < +\infty$, $a \leqslant x < +\infty$ соответственно, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Верхние и нижние грани множеств. Если действительное число b ограничивает множество D сверху, то b называется *верхней гранью множества* D. В этом случае любое число, большее b, тоже является верхней гранью. Число a, ограничивающее множество D снизу, называется *нижней гранью множества* D. Тогда и всякое число, меньшее a, будет нижней гранью D.

Наименьшая верхняя грань множества D называется его *точной верхней гранью* и обозначается $\sup D = M$ или $\sup\limits_{x \in D}\{x\} = M$ (лат. supremum — наибольший).

Из определения точной верхней грани M множества D вытекают следующие ее свойства:

1°. M есть верхняя грань множества D, т. е. для любого $x \in D$ выполняется неравенство $x \leqslant M$.

2°. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $x \in D$, такое, что $M - \varepsilon < x \leqslant M$.

Действительно, если бы в D не существовало числа $x > M - \varepsilon$, то для всех $x \in D$ выполнялось бы неравенство $x \leqslant M - \varepsilon$, т. е. $M - \varepsilon$ являлось бы верхней гранью, меньшей M, что невозможно.

Заметим, что точная верхняя грань M не обязана принадлежать множеству D. Например, пусть $D = (a, b)$. Нетрудно убедиться, что $\sup D = b$, но $b \overline{\in} D$.

Точной нижней гранью множества D называется наибольшая его нижняя грань и обозначается $\inf D = m$ или $\inf\limits_{x \in D}\{x\} = m$ (лат. infimum — наименьший). Точная нижняя грань m множества D характеризуется следующими свойствами:

1°. m есть нижняя грань множества D, т. е. для любого $x \in D$ выполнено неравенство $x \geqslant m$.

2°. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $x \in D$, такое, что $m \leqslant x < m + \varepsilon$.

В самом деле, если бы в D не нашлось числа x, для которого справедливо неравенство $m \leqslant x < m + \varepsilon$, то для всех $x \in D$ выполнялось бы соотношение $m + \varepsilon \leqslant x$, т. е. $m + \varepsilon$ являлось бы нижней гранью множества D, большей m, что невозможно.

Точная нижняя грань m не обязательно принадлежит множеству D. Например, для множества $D = (a, b)$ число a является его точной нижней гранью, но $a \bar{\in} (a, b)$.

Существование $\inf D$ и $\sup D$ у ограниченного множества действительных чисел D не является очевидным фактом. Мы примем в качестве аксиомы следующее предложение.

Аксиома о верхней (нижней) грани. Каждое ограниченное сверху (снизу) множество $D \subset \mathbf{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Точной верхней гранью неограниченного сверху множества считают, по определению, $+\infty$, а $-\infty$ — точной нижней гранью неограниченного снизу множества. Например, $\sup [a, +\infty) = +\infty$, $\inf (-\infty, b) = -\infty$, $\sup \mathbf{Z} = +\infty$, $\inf \mathbf{Z} = -\infty$.

Окрестность точки. Назовем *расстоянием* между числами x_1 и x_2 число $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. *$\varepsilon$-окрестностью точки* $a \in \mathbf{R}$ называется множество действительных чисел $U_\varepsilon(a)$, удаленных от точки a на расстояние, меньшее ε, т. е.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} \mid \rho(x, a) < \varepsilon\} \Leftrightarrow \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}. \qquad (2.6)$$

Число $\varepsilon > 0$ называется радиусом окрестности $U_\varepsilon(a)$, а точка a — ее центром.

Проколотой окрестностью точки a называется ее окрестность, из которой исключена сама эта точка. Если $U_\varepsilon(a)$ — окрестность точки a, то проколотую окрестность этой точки будем обозначать $U_\varepsilon(a) \setminus a = \dot{U}_\varepsilon(a)$.

Геометрически неравенство (2.6) показывает, что ε-окрестность точки a есть интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ длины 2ε, серединой которой является точка a числовой прямой (рис. 2.3, *а*).

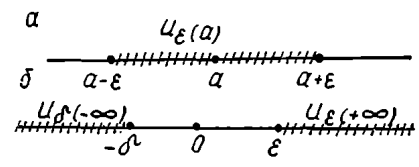


Рис. 2.3

Если $a = +\infty$, то, по определению, $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty)$, при $a = -\infty$ окрестность $U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta)$ (рис. 2.3, *б*).

Действительные числа обладают *свойством отделимости*: если a и b — два различных действительных числа, то их всегда можно отделить друг от друга непересекающимися окрестностями.

В самом деле, если $a \neq b$, то $|a - b| > 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|b - a|}{2} > 0$ окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются. Действительно, если бы окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ имели хотя бы одну общую точку x, то $|a - x| < \varepsilon$ и $|b - x| < \varepsilon$. Отсюда и из (2.3) имеем $|a - b| = |a - x + x - b| < |a - x| + |b - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|$, т. е. $|a - b| < |a - b|$, что невозможно.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что: а) $|a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|$; б) $|a-b-c| \geqslant |a|-|b|-|c|$.

2. Доказать, что если множество D ограничено, то $\inf D$ и $\sup D$ — конечные числа.

3. Найти точную нижнюю и точную верхнюю грани множеств:

а) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots\right\}$; б) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x < 2\}$;

в) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < 2x^3 - 1 < 15\}$.

4. Доказать, что объединение конечного числа ограниченных множеств есть ограниченное множество.

2.2. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

Числовая последовательность. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что этим определена *последовательность чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которую будем обозначать $\{x_n\}$.

Итак, по определению, числовая последовательность

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Часто последовательность $\{x_n\}$ задается формулой общего члена последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Примерами последовательностей могут служить:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$; 2) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$;

3) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots\right\}$; 4) $\{\lg(1+n)\} = \{\lg 2, \lg 3, \ldots\}$.

Из определения последовательности можно сделать вывод, что последовательность является функцией, отображающей множество N в R.

Если речь идет о различных членах последовательности $\{x_n\}$, то имеются в виду элементы с различными индексами n, хотя иногда может случиться, что $x_n = x_k$, $n \neq k$.

Если дана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторого подмножества ее членов образована новая последовательность, порядок следования членов в которой такой же, как и в данной последовательности, то она называется *подпоследовательностью* этой последовательности и обозначается $\{x_{n_k}\}$, $k \in \mathbf{N}$, причем $n_{k_1} < n_{k_2}$ тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$. Например, из последовательности $\{(-1)^n\}$ можно выделить две подпоследовательности $\{1\} = \{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ и $\{-1\} = \{-1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots\}$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует число $c > 0$, такое, что $|x_n| \leqslant c$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Таковой, например, является последовательность $\{\sin n\}$.

Предел последовательности. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность.

Число a называется *пределом числовой последовательности*

$\{x_n\}$ и обозначается $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для всякого положительного сколь угодно малого числа ε существует целое положительное число $N = N(\varepsilon)$, такое, что для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Другими словами, используя логические символы, определение предела можно записать в виде

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall n \geqslant N): |x_n - a| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*. Далее последовательность $\{x_n\}$ будет называться *бесконечно большой*, если $(\forall M > 0)(\exists N)$, $(\forall n > N)$: $|x_n| > M$. Если $(\forall M > 0)(\exists N)$, $(\forall n \geqslant N): x_n > M$ $(x_n < -M)$, то будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(-\infty)$.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом a, то будем писать $x_n \to a$ и говорить «x_n стремится к a», подразумевая при этом, что $n \to \infty$.

Дадим определение предела последовательности, используя понятие окрестности.

Из условия (2.7) имеем

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, \ \forall n \geqslant N. \quad (2.8)$$

Отсюда и из соотношения (2.6) получаем, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a (рис. 2.4).

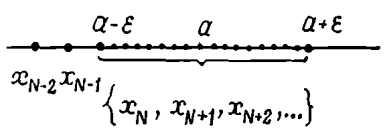


Рис. 2.4

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a, если вне любой ε-окрестности точки a имеется конечное число членов этой последовательности.

Пример 1. Пусть $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n-5}{4n+2}\right\}$. Доказать, что число $a = \dfrac{1}{2}$ является пределом этой последовательности.

Решение. По условию (2.7) имеем

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n-5}{4n+2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4n-10-4n-2}{2(4n+2)}\right| = \frac{3}{2n+1} < \varepsilon.$$

Найдем номер N, начиная с которого $|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Для этого решим неравенство $\dfrac{3}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{3-\varepsilon}{2\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\dfrac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1$—где $[x]$—целая часть x.

Из правила построения отрицания логических утверждений (см. § 1.1) и из соотношений (2.7) получаем, что *число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такое $\varepsilon^* > 0$, что для всякого натурального N существует такое натуральное*

$n^* > N$, *что* $|x_{n^*} - a| \geqslant \varepsilon^*$. Используя кванторы, тот факт, что a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, можно записать так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n \neq a\right) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon^* > 0)\,(\forall N)\,(\exists n^* > N) : |x_{n^*} - a| \geqslant \varepsilon^*.$$

Напомним, что при формулировке отрицания некоторого утверждения кванторы существования $\exists$ и всеобщности $\forall$ меняются местами.

Пример 2. Доказать, что число $a = \frac{2}{5}$ не является пределом последовательности $x_n = \frac{3n+1}{5n-1}$.

Решение. Имеем $|x_n - a| = \left|\frac{3n+1}{5n-1} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{5n+7}{5(5n-1)}\right| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+7}{5n-1}$. Так как $\frac{5n+7}{5n-1} > 1$, $\forall n$, то $\frac{1}{5} \cdot \frac{5n+7}{5n-1} > \frac{1}{5}$, $\forall n$, т. е. нашлось $\varepsilon^* = \frac{1}{5}$, такое, что $\left|\frac{3n+1}{5n-1} - \frac{2}{5}\right| > \frac{1}{5}$, $\forall n$. Значит, число $a = \frac{2}{5}$ не является пределом данной последовательности.

Свойства сходящихся последовательностей. Установим некоторые свойства сходящихся последовательностей.

1°. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, $a \neq b$. В силу свойства отделимости действительных чисел существуют окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\delta(b)$, такие, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\delta(b) = \varnothing$. Поскольку a — предел последовательности $\{x_n\}$, то вне окрестности $U_\varepsilon(a)$, а значит, в окрестности $U_\delta(b)$, может лежать лишь конечное число точек последовательности. Отсюда следует, что b не может быть пределом последовательности $\{x_n\}$, т. е. предел последовательности единствен. ■

2°. Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, то вне любой ε-окрестности точки a находится конечное число ее членов. Следовательно, вне этой окрестности находится и конечное число членов любой подпоследовательности $\{x_k\}$. Это и означает, что a есть предел подпоследовательности $\{x_k\}$. ■

3°. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для $\varepsilon = 1$ в силу условия (2.7) имеет место неравенство $|x_n| - |a| \leqslant |x_n - a| < 1$, $\forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$. Взяв $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |a| + 1\}$, получим $|x_n| \leqslant C$, $\forall n \in N$. ■

Замечание. Из свойства 2° вытекает очевидное следствие: если из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить две подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{n_p}\}$, сходящиеся к a и b, $a \neq b$, то исходная последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

Например, из последовательности $\{(-1)^n\}$ можно выделить две подпоследовательности $\{1\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ и $\{-1\} = \{-1, -1, -1, \ldots\}$, сходящиеся к 1 и -1 соответственно. В таком случае последовательность $\{(-1)^n\}$ предела не имеет.

4°. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера N, члены последовательности сохраняют знак a. В частности, $|x_n| > \frac{|a|}{2}$, $\forall n \geqslant N$.

Доказательство. Из условия (2.7) имеем $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, $\forall n \geqslant N$. Выбирая ε таким, что $0 < \varepsilon \leqslant \frac{|a|}{2}$, получаем, что числа $a - \varepsilon$, a и $a + \varepsilon$ имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком a. Далее для этого же ε имеем $|a|/2 > |a - x_n| \geqslant |a| - |x_n|$, $n \geqslant N$, откуда $|x_n| > \frac{|a|}{2}$, $n \geqslant N$. ■

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $a < b$, то, начиная с некоторого номера N, выполнено неравенство $x_n < y_n$.

Доказательство. В силу условия (2.7) имеем

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,\ b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon,\ \forall n \geqslant N. \qquad (2.9)$$

Так как $a < b$, то, выбрав $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, получим $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. Отсюда и из неравенств (2.9) находим, что $x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n \Rightarrow$ $\Rightarrow x_n < y_n$, $\forall n \geqslant N$. ■

5°. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если, начиная с некоторого номера N, $x_n \geqslant y_n$, то $a \geqslant b$. Иначе говоря,

$$(x_n \geqslant y_n,\ \forall n \geqslant N) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim_{n\to\infty} y_n\right),$$

т. е. переход к пределу в неравенстве $x_n \geqslant y_n$ не нарушает знака неравенства. В частности, если $x_n \leqslant C$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant C$.

Доказательство. Предположим, что $a < b$. Тогда, в силу следствия из свойства 4°, $x_n < y_n$, $\forall n \geqslant N$, что противоречит условию $x_n \geqslant y_n$. Таким образом, должно быть $a \geqslant b$. ■

Замечание. Если $x_n > y_n$, то не всегда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Например, если $x_n = \frac{n+1}{2n}$; $y_n = \frac{n-1}{2n}$, то $x_n > y_n$, но

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}.$$

Следующее свойство находит применение в различных приложениях.

6°. Пусть для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ выполнены неравенства $x_n \geqslant y_n \geqslant z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Для доказательства свойства 6° достаточно воспользоваться свойством 5°. Предоставляем это сделать читателю.

Другими словами, свойство 6° можно выразить следующим образом:

$$\left(x_n \geqslant y_n \geqslant z_n,\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a. \qquad (2.10)$$

Свойства 5° и 6° составляют содержание вопроса о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема 2.1 Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \tag{2.11}$$

то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \cdot a$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right) = a \cdot b$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \dfrac{1}{a}$.

Доказательство. 1) Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Из равенств (2.11) следует, что существуют номера N_1 и N_2, такие, что $|x_n - a| < \varepsilon_1$, $\forall n \geqslant N_1$; $|y_n - b| < \varepsilon_2$, $\forall n \geqslant N_2$. Отсюда при $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$ имеем $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$.

2) При $c \neq 0$ для $\varepsilon_1 = \varepsilon/|c|$ существует номер N, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon_1$, $\forall n \geqslant N \Rightarrow |cx_n - ca| = |c|\,|x_n - a| < \dfrac{|c|\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$, $\forall n \geqslant N$.

Если $c = 0$, то равенство 2 очевидно.

3) Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то они ограничены, т. е. $(\exists C > 0): |x_n| \leqslant C$, $|y_n| \leqslant C$, $\forall n \in N$. Отсюда $\forall \varepsilon > 0$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon/2C$ имеем $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leqslant |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - a| < C \cdot \varepsilon/2C + C \cdot \varepsilon/2C = \varepsilon$, так как из неравенства $|x_n| \leqslant C$ по свойству 5° следует, что $|a| \leqslant C$.

4) Поскольку $x_n \to a \neq 0$, по свойству 4°, все $x_n \neq 0$, начиная с некоторого номера N. Следовательно, имеет смысл выражение $\dfrac{1}{x_n}$.

В таком случае $\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{a - x_n}{ax_n}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{|a| \cdot |x_n|}$.

Так как $x_n \to a$, то $\forall \varepsilon > 0$ при $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}a^2\varepsilon$ найдется номер N_1, такой, что $|x_n - a| < \varepsilon_1$, $\forall n \geqslant N_1$. С другой стороны, на основании свойства 4°, найдется номер N_2, такой, что $|x_n| > \dfrac{|a|}{2}$, $\forall n \geqslant N_2$. Отсюда при $N = \max\{N_1, N_2\}$ получаем $\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{|a| \cdot |x_n|} < \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a^2\varepsilon \cdot 2}{|a| \cdot |a|} = \varepsilon$, $\forall n \geqslant N$, чем и доказан п. 4. ■

Следствие. Используя свойства 3° и 4°, получаем, что если выполнены равенства (2.11) и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$, $a>0$.

Решение. Пусть $a\geqslant 1$. Положим $\sqrt[n]{a}=1+x_n$, $x_n\geqslant 0$. В силу неравенства Бернулли (1.2) $a=(1+x_n)^n\geqslant 1+nx_n$. Отсюда, используя свойство (2.10), получаем $\left(0\leqslant x_n\leqslant\dfrac{a-1}{n}\right)\Rightarrow\left(0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+1=1$, $a\geqslant 1$.

Если $a<1$, то $\dfrac{1}{a}>1$. Отсюда, учитывая последнее равенство и теорему (2.1), имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$.

Итак, для любого $a>0$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Решение. Положив $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, $x_n\geqslant 0$, по известной формуле бинома Ньютона* получаем $n=(1+x_n)^n=1+nx_n+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_n^2+\ldots+x_n^n$. Отсюда и из выражения (2.10) имеем $n\geqslant\dfrac{n(n-1)}{2}x_n^2\Rightarrow 0\leqslant x_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)=1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Монотонные последовательности. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\ldots$, при этом последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей*, если $x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$. Аналогично числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\ldots$; при этом последовательность $\{x_n\}$ называется *строго убывающей*, если $x_1>x_2>\ldots>x_n>x_{n+1}>\ldots$. Возрастающие и убывающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей.

Монотонно возрастающая последовательность всегда ограничена снизу своим первым членом, а монотонно убывающая последовательность ограничена сверху первым членом.

По свойству 3° необходимым условием сходимости последовательности является ее ограниченность. Однако ограниченность последовательности не гарантирует ее сходимости. Так, например, ограниченная последовательность $\{(-1)^n\}$ не является сходящейся.

Оказывается, что для монотонных последовательностей их ограниченность является достаточным условием сходимости.

---

* И. Ньютон (1643—1727) — английский математик.

Теорема 2.2 (критерий сходимости монотонной последовательности). Для того чтобы монотонная последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной. При этом, если $\{x_n\}$ монотонно возрастающая (убывающая) последовательность, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n \{x_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n \{x_n\}\right).$$

Доказательство. *Необходимость.* В силу свойства 3° всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Достаточность. Пусть для определенности $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая ограниченная последовательность и $A = \sup\{x_n\}$. По свойству точной верхней грани множества $\{x_n\}$, в нем для $\forall \varepsilon > 0$ существует такой элемент x_N, что $A - \varepsilon < x_N \leqslant A$, а в силу того, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастающая, справедливы неравенства $A - \varepsilon < x_N \leqslant x_{N+1} \leqslant x_{N+2} \leqslant \ldots \leqslant A$, т. е., начиная с номера N, все члены последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют условию $|x_N - A| < \varepsilon$. Значит, $A = \sup_n \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы (для убывающей последовательности). ■

Теорема 2.3. Если $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\{a_n\}$ — монотонная последовательность, а также существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+1}{a_n}$, то:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0; \tag{2.12}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty. \tag{2.13}$$

Доказательство. 1) Пусть $q < 1 \Leftrightarrow 1 - q > 0$. Возьмем ε таким, что $0 < \varepsilon < 1 - q$. Отсюда $q + \varepsilon < 1$ и $q - \varepsilon < 1$. В силу условия (2.12) для выбранного ε выполнены неравенства

$$q - \varepsilon < \frac{a_n+1}{a_n} < q + \varepsilon, \forall n \geqslant N. \tag{2.14}$$

При $n = N$ из неравенств (2.14) следует

$$(q - \varepsilon)\, a_N < a_{N+1} < (q + \varepsilon)\, a_N.$$

Аналогично при $n = N + 1$ получим

$$(q - \varepsilon)^2 a_N < (q - \varepsilon)\, a_{N+1} < a_{N+2} < (q + \varepsilon)\, a_{N+1} < (q + \varepsilon)^2 a_N.$$

Продолжая этот процесс, в общем случае при $n = N + p$, $p = 1, 2, \ldots$, находим

$$(q - \varepsilon)^p a_N < a_{N+p} < (q + \varepsilon)^p a_N,\ p \in \mathbf{N}. \tag{2.15}$$

Устремляя здесь p к бесконечности, получаем

$$0 = \lim_{p\to\infty} [(q - \varepsilon)^p a_N] \leqslant \lim_{p\to\infty} a_{N+p} \leqslant \lim_{p\to\infty} [(q + \varepsilon)^p a_N] = 0,$$

откуда $\left(\lim\limits_{p\to\infty} a_{N+p}=0\right)\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, поскольку $\lim\limits_{p\to\infty}(q-\varepsilon)^p=\lim\limits_{p\to\infty}(q+\varepsilon)^p=0$.

2) Если выполнено условие (2.13), то $a_{n+1}>a_n$, $\forall n\in\mathbf{N}$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ строго монотонно возрастает. Выберем теперь ε таким, чтобы $0<\varepsilon<q-1$. Тогда, согласно неравенствам (2.15),

$$(a_{N+p}>(q-\varepsilon)^p a_N)\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad (q-\varepsilon)>1 \text{ (!)}). \blacksquare$$

Пример 5. Найти предел последовательности x_n, общий член которой дается равенством $x_n=\dfrac{a^n}{n!}$, $a>0$.

Решение. Видим, что $x_{n+1}=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a^n}{n!}\cdot\dfrac{a}{n+1}=x_n\dfrac{a}{n+1}$. Очевидно, начиная с некоторого n, величина $\dfrac{a}{n+1}<1$, т. е. $x_{n+1}<x_n$. Значит, последовательность монотонно убывает. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}=0<1$, то, согласно теореме 2.3, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

Пример 6. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n},\quad x_1=\sqrt{a},\ a>0.$$

Решение. Требуется найти предел последовательности $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, ... Очевидно, что $x_{n+1}>x_n$. Отсюда $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+x_n}$. Решая это неравенство, находим, что $x_n<\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная. Значит, она имеет предел. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ при $n\to\infty$, получим $A=\sqrt{a+A}$, где $A=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Отсюда $A=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}$. Но $x_n>0$, поэтому и $A\geqslant 0$, т. е. $A=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}$.

Число *e*. Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Согласно неравенству Бернулли, $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geqslant 1+n\cdot\dfrac{1}{n}=2$. Обозначим $y_n=x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)>2$. Тогда для последовательности $\{y_n\}$ имеем $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$. Отсюда, еще раз воспользовавшись неравенством Бернулли, получим

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\Big/\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{n^n n^{n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}}=\frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}=$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1} \geqslant \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{n-1}{n^2-1}\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1,$$

т. е. $y_{n-1} \geqslant y_n$.

Итак, последовательность y_n монотонно убывает и ограничена снизу числом 2. Следовательно, она имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left[x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

т. е. последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ тоже имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{2.16}$$

причем $e = 2{,}718281\ldots$ — иррациональное число.

Критерий Коши. Предварительно введем некоторые дополнительные понятия. Говорят, что совокупность отрезков $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, образует систему *вложенных отрезков*, если выполнены условия

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \Leftrightarrow a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n. \tag{2.17}$$

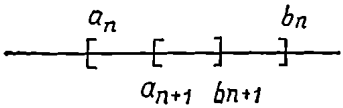


Рис. 2.5

При этом вложенные отрезки образуют систему стягивающихся отрезков, если $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (рис. 2.5).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4 (Кантора*). Всякая последовательность вложенных стягивающихся отрезков имеет единственную общую точку, принадлежащую всем отрезкам.

Доказательство. Из условия (2.17) следует, что монотонные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ концов отрезков сходятся, причем из условия $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Кроме того, из условия (2.17) и свойства $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ имеем

$$a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n \{a_n\} = \inf_n \{b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Отсюда следует, что общей точкой, принадлежащей всем отрезкам $[a_n, b_n]$, служит число $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ■

Пример 7. Для последовательности отрезков $I_n = \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbf{N}$ найти и общую часть.

Решение. Левые концы $a_n = -1-\frac{1}{n}$ имеют предел, равный -1, а правые концы $b_n = 1+\frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ стремится к 1. Значит, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [-1, 1]$.

---

* Г. Кантор (1845—1918) — немецкий математик.

Назовем последовательность $\{x_n\}$ *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такой, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$, т. е. если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geqslant N, \ \forall m \geqslant N) : \rho(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Последовательность Коши обладает следующими свойствами:

1°. Всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a. Тогда $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n, m \geqslant N)$:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$, т. е. $\{x_n\}$ — последовательность Коши. ■

2°. Всякая последовательность Коши ограничена.

Ограниченность последовательности Коши доказывается так же, как и ограниченность сходящейся последовательности.

3°. Последовательность Коши, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши, а $\{x_{n_k}\}$ — сходящаяся к a ее подпоследовательность. Из неравенства $|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$, учитывая, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, $((n, n_k \to \infty) \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| \to 0)$, а $x_{n_k} \to a$, получаем, что $|x_n - a| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $x_n \to a$. ■

Теорема 2.5 (критерий сходимости Коши). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши.

Доказательство. *Необходимость* следует из свойства 1°.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши, тогда по свойству 2° она ограничена. Положим

$$a_m = \inf_{m \leqslant n} \{x_n\}; \ b_m = \sup_{m \leqslant n} \{x_n\}, \ \forall m \in \mathbf{N}.$$

Очевидно, что

$$a_m \leqslant a_{m+1} < b_{m+1} \leqslant b_m, \ \forall m \in \mathbf{N}. \tag{2.18}$$

Соотношения (2.18) показывают, что отрезки $[a_m, b_m]$ вложены друг в друга, и так как $\lim\limits_{n,k \to \infty} (x_n - x_k) = 0$, то отрезки $[a_m, b_m]$ стягивающиеся.

Тогда по теореме Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам $[a_m, b_m]$. Для $n \geqslant m$ справедливы неравенства

$$a_m = \inf_{m \leqslant n} \{x_n\} \leqslant x_n \leqslant \sup_{m \leqslant n} \{x_n\} = b_m, \ \forall n, \tag{2.19}$$

причем $\lim\limits_{m \to \infty} a_m = \lim\limits_{m \to \infty} b_m = c$. Отсюда и из неравенств (2.19) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. ■

Замечание. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Обозначим $m = n + p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда для последовательности Коши можно дать другое определение: последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такой, что $\rho(x_n, x_{n+p}) = |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall n \geqslant N)\,(\forall p \geqslant 0) : |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon. \tag{2.20}$$

Пример 8. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},\ n \in \mathbf{N}. \tag{2.21}$$

Решение. Так как $x_{n+p} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!}$, то

$$|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)}\right).$$

Если в правой части равенства вместо $\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \ldots, \frac{1}{n+p}$ положить $\frac{1}{n+1}$, то она увеличится, т. е.

$$|x_n - x_{n+p}| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^p}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Здесь неравенство усилено и $\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$ — сумма членов геометрической прогрессии и со знаменателем $\frac{1}{(n+1)} < 1$. Из получившегося неравенства видно, что при $n \to \infty$ разность $|x_n - x_{n+p}|$ стремится к нулю. Итак, последовательность (2.21) фундаментальная и, значит, сходится. Позднее будет показано, что предел ее равен e.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$;

б) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|\right)$. Верно ли обратное?

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2} = -\frac{3}{5}$ (указать $N = N(\varepsilon)$).

2. Найти предел последовательностей $\{x_n\}$, если:

а) $x_n = \dfrac{2n^3 - n}{3n^3 - 2n + 5}$; б) $x_n = \dfrac{(n+3)^3 - (n+4)^3}{(n+3)^3 + (n+4)^3}$;

в) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}$; г) $x_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \ldots + (5n - 3)}$;

д) $x_n = \dfrac{5}{6} + \dfrac{13}{36} + \ldots + \dfrac{3^n + 2^n}{6^n}$.

3. Доказать, что если монотонная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

4. Используя схему рассуждений при доказательстве теоремы 2.3, доказать, что если $a_n > 0$, то

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < +\infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \right). \tag{2.22}$$

5. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + n^4}$.

Решение. Воспользуемся соотношением (2.22). В данном случае $a_n = n^5 + n^4$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^5 + (n+1)^4}{n^5 + n^4} = 1$, то из свойства (2.22) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + n^4} = 1$.

6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$.

7. Доказать, что каждая из следующих последовательностей имеет предел, равный нулю:

а) $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{n^n}{(2n)!} \right\}$; б) $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{2^{3n}}{n!} \right\}$; в) $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{n!}{2^{n^2}} \right\}$.

2.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Понятие предела функции в точке. Рассмотрим функцию $f: X \to Y$, где X и Y — некоторые множества действительных чисел. Число A называется *пределом функции f в точке x_0*, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, что для всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что A является пределом функции f в точке x_0, запишем в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A, \; x \to x_0.$$

Данное определение предела функции в точке называют *определением предела по Коши.*

С помощью логических символов его можно сформулировать следующим образом:

$$(A = \lim_{x\to x_0} f(x)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2.23}$$

Так как неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, то определение предела функции в точке можно сформулировать следующим образом: число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A найдется такая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0$ соответствующие значения $f(x)$ принадлежат окрестности $U_\varepsilon(A)$, т. е.

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

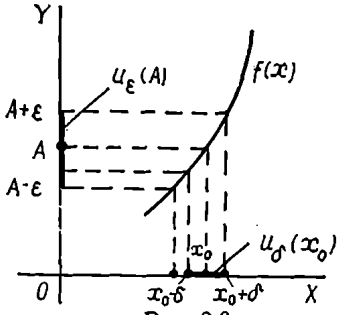


Рис. 2.6

Геометрическая иллюстрация определения предела функции f в точке x_0 изображена на рис. 2.6, из которого следует, что для значений x из некоторой δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A.

С вычислительной точки зрения определение предела в точке имеет простой смысл: с какой погрешностью δ необходимо вычислять значение точки x_0, чтобы погрешность вычисления предела A не превосходила заданной точности ε.

Существует другое определение предела функции в точке (по Гейне*): *число A называется пределом функции f в точке x_0, если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки, и если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A при $n \to \infty$.*

Таким образом,

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow (\forall \{x_n\})\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0\right) : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \quad (2.24)$$

Докажем эквивалентность определений предела функции в точке по Коши и по Гейне в том смысле, что если A — предел функции в точке по Коши, то это же число является и пределом этой функции по Гейне, и наоборот.

В самом деле, пусть A — предел функции f в точке x_0 по Коши, т. е. имеет место соотношение (2.23). Если $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, то, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство $0 < |x_n - x_0| < \delta$, $\forall n \geqslant N$. Тогда в силу условия (2.23) получим $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, $\forall n \geqslant N$, т. е. A — предел по Гейне.

Наоборот, пусть A — предел функции в точке по Гейне. Если предположить, что A не является пределом по Коши, то для некоторого $\varepsilon^* > 0$ в любой δ-окрестности $U_\delta(x_0)$ найдется число x^*, такое, что из неравенства $0 < |x^* - x_0| < \delta$ следует $|f(x^*) - A| \geqslant \varepsilon^*$. В частности, для $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, получим последовательность $\{x_n\}$, для

* Г. Гейне (1821—1881) — немецкий математик.

которой $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ и $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon^*$. Из первого неравенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, а из второго $-\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon^*$, т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к A. Противоречие говорит о том, что указанного ε^* не существует, а, значит, A — предел функции в точке по Коши.

Еще раз подчеркнем, что при решении вопроса о существовании предела функции f в точке x_0 сама точка x_0 в рассмотрении не участвует, а функция f считается определенной в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0. В этом смысле свойство функции иметь предел в точке является *локальным свойством* функции.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ найти предел в точке $x_0=3$.

Решение. Поскольку при вычислении предела в точке $x_0=3$ сама точка x_0 в расчет не принимается ($x\neq x_0$), то

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3).$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$. Для этого зададимся произвольным $\varepsilon>0$ и в соответствии с соотношением (2.23) рассмотрим разность $|f(x)-A|=|x+3-6|=|x-3|=\delta$, $\delta=\varepsilon$. Отсюда видно, что как только $0<|x-3|<\delta$, то $|(x+3)-6|<\varepsilon$, т. е. действительно $\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$.

Этот факт можно легко установить, если взять любую последовательность $x_n\to3$, $x_n\neq3$, и при этом убедиться, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+3)=6$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$.

Пример 2. Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ найти предел в точке $x_0=1$.

Решение. Избавимся от иррациональности в числителе и знаменателе. Для этого умножим и разделим функцию на $(\sqrt{x}+1)(x^2+\sqrt{x})$. В результате при $x\neq1$ получим

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$
$$=\frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2+\sqrt{x})}.$$

Теперь, как и в примере 1, легко найти искомый предел:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2+\sqrt{x})}=\frac{1\cdot3\cdot2}{1+1}=3.$$

Как и для последовательностей, получим необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке.

Теорема 2.6 (критерий Коши). Для того чтобы функция f имела в точке x_0 предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$

существовала такая проколотая окрестность $U_\delta(x_0)\setminus x_0$ точки x_0, что для любых $x' \in U_\delta(x_0)\setminus x_0$ и $x'' \in U_\delta(x_0)\setminus x_0$ выполнялось бы условие $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, т. е.

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x',\ x'' \in U_\delta(x_0)\setminus x_0) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (2.25)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — предел функции f в точке x_0, т. е. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists U_\delta(x_0),\ (\forall x \in U_\delta(x_0)\setminus x_0) : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любых $x',\ x'' \in U_\delta(x_0)\setminus x_0$, по свойству модуля, получаем $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Достаточность. Пусть имеет место условие (2.25). Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, то $(\forall \delta > 0)(\exists N)(\forall n,\ m \geqslant N) : |x_n - x_0| < \frac{\delta}{2},\ |x_m - x_0| < \frac{\delta}{2}$. Отсюда по свойству модуля получаем $|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_0| + |x_0 - x_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,\ x_n,\ x_m \in U_\delta(x_0)$. Из этого соотношения, учитывая соотношение (2.25), выводим неравенство $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, которое означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальная. В силу критерия Коши для последовательностей она сходится, т. е. функция f в точке x_0 имеет предел (по Гейне). ■

Предел функции в бесконечности. Напомним, что δ-окрестностью $+\infty$ $(-\infty)$ называется множество действительных чисел $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$ $(U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta))$.

Пределом функции f при x, стремящимся к $+\infty$ $(-\infty)$ (в бесконечности), называется число A, удовлетворяющее условию

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta\,(\forall x < -\delta)) : |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (2.26)$$

Другими словами, число A называется пределом f при x, стремящемся к $+\infty$ $(-\infty)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U_\delta(+\infty)$ $(U_\delta(-\infty))$, такую, что для всех x из указанной окрестности выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предел функции f в бесконечности обозначается $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

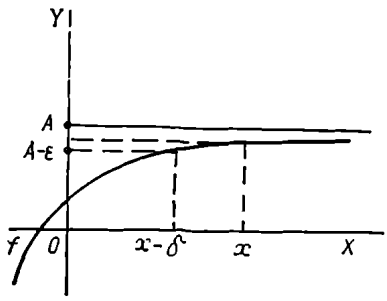


Рис. 2.7

Геометрическая иллюстрация предела функции в бесконечности изображена на рис. 2.7. Из условия (2.26) и рис. 2.7 следует, что для значений $x \in U_\delta(+\infty)$ соответствующие значения $f(x)$ попадают в окрестность $U_\varepsilon(A)$, если $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Равносильное определение предела функции в бесконечности в терминах предела последовательностей (по Гейне) выглядит следующим образом: число A называется пределом функции f в бесконечности, если для любой последовательности $x_n \to +\infty$ $(-\infty)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к A, т. е. $(x_n \to +\infty \ (-\infty)) \Rightarrow f(x_n) \to A$.

Свойства функций, имеющих предел. Установим основные свойства функций, имеющих в точке x_0 предел. Эти свойства очевидным образом переносятся и на случай предела функции в бесконечности.

1° (единственность предела). Если функция имеет в точке предел, то он единствен.

Доказательство этого свойства вытекает из условия (2.23) и проводится по схеме доказательства единственности предела последовательности.

Дадим теперь следующее определение. Функция $f: X \to Y$ называется ограниченной на множестве X, если существует число $C > 0$, такое, что

$$|f(x)| \leqslant C, \ \forall x \in X. \tag{2.27}$$

Так, например, функции $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$ ограничены в области определения, поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2°. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то из соотношения (2.23) при $\varepsilon = 1$ имеем

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0),$$

что, согласно условию (2.27), и означает ограниченность f в этой окрестности. ■

3°. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0 \ (<0)$, то существует такая проколотая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

Доказательство этого свойства дословно повторяет доказательство аналогичного свойства для последовательностей.

4°. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ и в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 имеет место неравенство $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Это свойство вытекает из аналогичных свойств пределов последовательностей, если воспользоваться определением предела функции в точке по Гейне.

Следующее свойство относится к алгебраическим операциям над функциями, имеющими предел в точке.

5°. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B;$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

Докажем, например, второе соотношение. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к x_0. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)\cdot g(x_n)]=A\cdot B$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=B$.

Односторонние пределы. Назовем левой полуокрестностью точки x_0 произвольный интервал (a, x_0), $a<x_0$, а правой полуокрестностью точки x_0 — произвольный интервал (x_0, b), $x_0<b$. Число A называется *пределом функции* f в точке x_0 *справа (слева)*, если функция f определена в некоторой правой (левой) полуокрестности точки x_0 и если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n>x_0$ ($x_n<x_0$) соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f сходится к A. Предел справа обозначается

$$A=f(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=\lim_{\substack{x_n>x_0\\ x_n>x_0}}f(x_n)=\lim_{x\to x_0+0}f(x),$$

а предел слева —

$$A=f(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ x_n<x_0}}f(x_n)=\lim_{x\to x_0-0}f(x).$$

Пределы справа и слева называются *односторонними пределами* функции в точке.

Пример 3. Для функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x+x^3}$ найти односторонние пределы в точке $x_0=0$.

Решение. Очевидно, что $\dfrac{|x|}{x+x^3}=\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$. Отсюда $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|x|}{x+x^3}=$ $=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=1$; $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|x|}{x+x^3}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{-x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=-1$.

Заметим, что точка x принадлежит левой (правой) полуокрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда $x=x_0-\varepsilon$ ($x=x_0+\varepsilon$), $\varepsilon>0$. Учитывая это, предел слева в точке x_0 можно определить так:

$$f(x_0-0)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}f(x_0-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to+0}f(x_0-\varepsilon),\qquad(2.28)$$

а предел справа — равенством

$$f(x_0+0)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}f(x_0+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to+0}f(x_0+\varepsilon).\qquad(2.29)$$

Нетрудно дать и другое определение одностороннего предела (по Коши). Например, число A называется пределом слева функции

f в точке x_0, если f определена в левой полуокрестности точки x_0 и если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : x_0 - \delta < x < x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции справа в точке x_0.

Задачи и упражнения.

1. Исходя из определения предела, показать, что $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 4) = 5$. Указать $\delta = \delta(\varepsilon)$.

2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^4 + x} + x}$;

в) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}$.

3. Найти пределы слева и справа в точке $x_0 = 0$ для функции $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2x - x^2}$.

2.4. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Бесконечно малые функции и их свойства. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (б. м. ф.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, т. е. если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x)| < \varepsilon. \qquad (2.30).$$

Например, функция $\sin x$ при $x \to 0$ — б. м. ф., функция $x^2 - 4$ при $x \to \pm 2$ — б. м. ф.

Аналогично функция f есть б. м. ф. при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : x > \delta\,(x < -\delta)) : |f(x)| < \varepsilon.$$

Точно так же последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Установим некоторые свойства б. м. ф.

1°. Сумма и произведение конечного числа б. м. ф. при $x \to x_0$ есть б. м. ф.

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, получим

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{k} f_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = 0.$$

Аналогично проводится доказательство и для произведения. ■

2°. Произведение б. м. ф. при $x \to x_0$ на ограниченную функцию есть б. м. ф. при $x \to x_0$.

Доказательство. Пусть при $x \to x_0$ функция f — б. м. ф., а функция g — ограниченная, т. е. существует $C > 0$, такое, что

$|g(x)| \leqslant C$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, в силу условия (2.30), существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Отсюда $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{c} \cdot C = \varepsilon$, $\forall x \in \mathrm{U}_\delta(x_0)$. ■

Пример 1. Так как x — б. м. ф. при $x \to 0$, а $\cos \frac{1}{x}$ — ограниченная функция $\left(\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leqslant 1!\right)$, то $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

Связь функции, ее предела и бесконечно малой функции. Докажем следующую теорему.

Теорема 2.7. Для того чтобы число A было пределом функции f в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, т. е.

$$(A = \lim_{x \to x_0} f(x)) \Leftrightarrow (f(x) = A + \alpha(x),\ \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0). \qquad (2.31)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тогда, обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$, получим $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Достаточность. Если $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то, очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. ■

Например, функцию $f(x) = x^2 + 3$ в окрестности точки $x_0 = 1$ можно представить в виде $x^2 + 3 = 4 + (x - 1)(x + 1)$, где $4 = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, а $\alpha(x) = (x - 1)(x + 1)$ — б. м. ф. при $x \to 1$.

Бесконечно большие функции и их свойства. Если значения функции f стремятся к бесконечности при $x \to x_0$, то в соответствии с определением предела функции в точке можно ввести следующее понятие.

Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$), если для любого $M > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x из проколотой окрестности $\mathrm{U}_\delta(x_0) \setminus x_0$ точки x_0 выполнено условие $|f(x)| > M$ ($f(x) > M$ или $f(x) < -M$).

Аналогично вводится понятие бесконечного предела функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Например, тот факт, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, означает, что для любого $M > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x < -\delta$ выполнено неравенство $f(x) > M$.

Говорят, что функция f называется *бесконечно большой функцией* (б. б. ф.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$), т. е.

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)\right) \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathrm{U}_\delta(x_0) \setminus x_0): \\ : |f(x)| > M.$$

Аналогично определяется б. б. ф. при $x \to x_0 \pm 0$. Так, например, тот факт, что $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$, означает (рис. 2.8), что

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : x_0 < x < x_0 + \delta) : f(x) < -M.$$

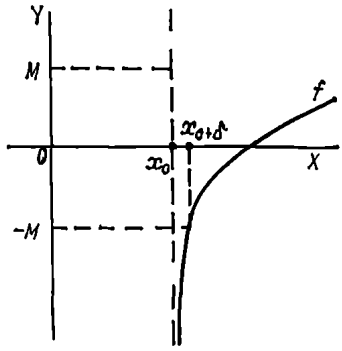


Рис. 2.8

Б. б. ф. обладают следующими свойствами.

1°. Произведение двух б. б. ф. при $x \to x_0$ есть б. б. ф.

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 — б. б. ф. при $x \to x_0$, т. е.

$$(\forall M > 0)(\exists \delta_i > 0)(\forall x \in \mathring{U}_{\delta_i}(x_0)) : |f_i(x)| > \sqrt{M}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда, взяв $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получаем, что

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| = |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| > M, \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0). \blacksquare$$

2°. Если в некоторой окрестности точки x_0 $0 < C < |f_1(x)|$, а $f_2(x)$ — б. б. ф. при $x \to x_0$, то $f_1 \cdot f_2$ тоже б. б. ф. при $x \to x_0$.

Доказательство этого свойства очевидно, если положить $M_1 = M/C$.

3°. Если f — б. б. ф. при $x \to x_0$, то $1/f$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. Если g — б. м. ф. при $x \to x_0$, такая, что $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то $1/g$ — б. б. ф.

Докажем первую часть этого свойства. Если f — б. б. ф. при $x \to x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$, т. е. $1/f$ — б. м. ф. при $x \to x_0$. $\blacksquare$

Свойство 3° оправдывает следующую символическую запись, часто используемую для сокращения записи: если $a > 0$, то пишут

$$\frac{a}{+0} = +\infty; \quad \frac{a}{-0} = -\infty; \quad \frac{a}{+\infty} = +0; \quad \frac{a}{-\infty} = -0; \quad \frac{a}{\infty} = 0;$$

$$\frac{a}{0} = \infty, \tag{2.32}$$

где под символом ∞ понимается либо $+\infty$, либо $-\infty$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б. м. ф. при $x \to x_0$, то выражение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ называется *неопределенностью типа* $\frac{0}{0}$, если же $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б. б. ф. при $x \to x_0$, то выражение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ называется неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$, а выражение $\alpha(x) - \beta(x)$ — неопределенностью типа $\infty - \infty$. Если $\alpha(x)$ — б. м. ф., а $\beta(x)$ — б. б. ф., то $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ называется неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Аналогично вводятся не-

определенности типа 1^{∞}, ∞^0 и 0^0. *Раскрыть неопределенность* – это значит найти предел соответствующего выражения (если он существует), что зависит от конкретных функций, входящих в это выражение.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{4x^2+2}$.

Решение. Выражение под знаком предела представляет собой неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия разделим числитель и знаменатель на x^2. Тогда, с учетом обозначений (2.32), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{4x^2+2}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{3-0+0}{4+0}=\frac{3}{4}.$$

Пример 3. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-2x-1}$ при $x\to 1$.

Решение. При $x\to 1$ эта функция представляет собой неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители. Получим

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(3x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{1}{4}.$$

Задачи и упражнения.

1. Доказать, что всякая б. м. ф. при $x\to x_0$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0.
2. Дать определение б. б. ф. при $x\to+\infty$.
3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ отличен от нуля, а $g(x)$ — б. б. ф. при $x\to x_0$. Будет ли $f(x)\cdot g(x)$ б. б. ф. при $x\to x_0$?
4. Доказать, что функция $f(x)=(x-1)^2\sin^3\dfrac{1}{x-1}$ является б. м. ф. при $x\to 1$.
5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+\sin\dfrac{x}{x^2+1}\cos x}{1+\cos\dfrac{1}{x}}$.

2.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Непрерывность функции в точке. Функция $f:X\to Y$ называется *непрерывной в точке* $x_0\in X$, если она определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, причем

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{2.33}$$

т. е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Используя соотношение (2.23), определение непрерывности функции в точке x_0 можно сформулировать следующим образом: функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (2.34)$$

С помощью понятия окрестности соотношения (2.34) можно перефразировать так: функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(f(x_0))$ точки $f(x_0) \in Y$ найдется δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки $x_0 \in X$, такая, что

$$f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)), \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Теперь дадим другое определение непрерывности функции в точке, эквивалентное определению (2.34).

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* при переходе из точки x_0 в точку x и обозначается $x - x_0 = \Delta x$. Величина $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции*, соответствующим приращению аргумента $x - x_0$, и обозначается $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Тогда неравенства (2.34) показывают, что функция f непрерывна в точке x_0, если малое приращение аргумента вызывает малое приращение функции, т. е.

$$(|\Delta x| < \delta) \Rightarrow |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = |\Delta f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0. \quad (2.35)$$

Итак, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если ее приращение в этой точке есть б. м. ф. при $\Delta x \to 0$ $(x \to x_0)$.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

Решение. Рассмотрим приращение функции в точке x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c) = \Delta x\,(2ax_0 + b + a\Delta x).$$

Отсюда видно, что $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, т. е., согласно соотношениям (2.35), искомая функция непрерывна в точке x_0.

Свойства непрерывных в точке функций. Перечислим основные свойства функций, непрерывных в точке.

1°. Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2°. Если f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ (< 0), то существует окрестность $U(x_0)$, в которой $f(x) > 0$ (< 0).

3°. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то и функции $f + g$, $f \cdot g$ и f/g (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

4° Если для функций $u(x)$ и $v(x)$ выполнено неравенство $u(x_0) > v(x_0)$ $(u(x_0) < v(x_0))$ и $u(x)$, $v(x)$ непрерывны в точке x_0, то существует окрестность точки x_0, в которой $u(x) > v(x)$ $(u(x) < v(x))$.

Доказательство свойств 1° — 3° следует из определения непрерывности функции и аналогичных свойств пределов функции. Свойство 4° вытекает из свойств 2° и 3°, если положить $f = u - v$.

5° (непрерывность сложной функции). Пусть g непрерывна в точке x_0, а функция f непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, тогда сложная функция $f[g(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В силу непрерывности f в точке $y_0 = g(x_0)$

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \sigma > 0)\,(\forall y : |y - y_0| < \sigma) : |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

Вследствие непрерывности g в точке x_0 для найденного σ имеем

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x : |x - x_0| < \delta) : |g(x) - g(x_0)| < \sigma.$$

Из этих неравенств следует, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f[g(x)] - f[g(x_0)]| < \varepsilon$, т. е. функция $f(g)$ непрерывна в точке x_0. ■

Из последнего свойства вытекает соотношение

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \to x_0} g(x)],$$

которое показывает, что *под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу*. Справедливость этой формулы следует из того, что ее левая часть равна $f[g(x_0)]$, согласно свойству 5°, а правая часть также равна $f[g(x_0)]$, в силу непрерывности функции g в точке x_0.

Полученное соотношение лежит в основе метода замены переменной для пределов непрерывных функций: если функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{y \to y_0} f(y), \quad y = g(x). \tag{2.36}$$

Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация. Функция f называется *непрерывной в точке x_0 слева (справа)*, если $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ (соответственно $f(x_0) = f(x_0 + 0)$).

Отсюда следует, что непрерывность функции f в точке x_0 можно определить еще таким образом: функция f называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции, если функция f в этой точке не определена или же не является в ней непрерывной.

Дадим классификацию точек разрыва функции.

Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции f, если в ней существуют конечные пределы справа $f(x_0 + 0)$ и слева $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$, при этом разность $\sigma_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* f в точке x_0 (рис. 2.9).

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции f, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ (рис. 2.10). Чтобы устранить разрыв в точке x_0, достаточно положить $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т. е. изменить значение функции в одной точке x_0.

Если же в точке x_0 функция f терпит разрыв, причем хотя бы

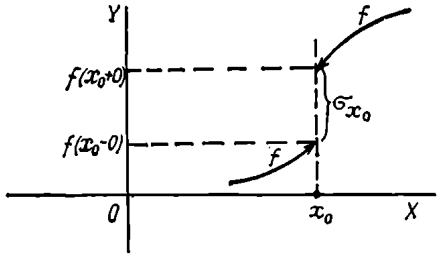


Рис. 2.9

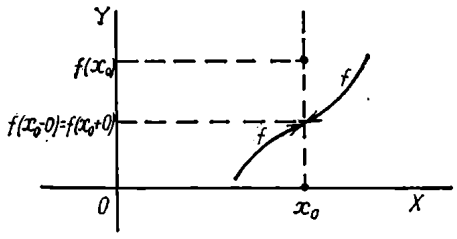


Рис. 2.10

один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$ или вообще не существует, то в точке x_0 имеет место *разрыв второго рода.*

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-2; \\ -x-2, & -2\leqslant x<0; \\ 0, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

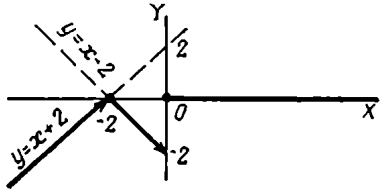


Рис. 2.11

В точке $x_0=-2$, согласно равенствам (2.28) и (2.29), находим $f(-2-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(-2-\varepsilon+2)=0$, $f(-2+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(2-\varepsilon-2)=0$. Поскольку $f(-2-0)=f(-2+0)=f(-2)=0$, то в точке $x_0=-2$ функция непрерывна. Так как $f(-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon-2)=-2$, $f(+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon=0=f(0)$, то функция f в точке $x_0=0$ непрерывна справа и скачок $\sigma_0=f(+0)-f(-0)=2$ (рис. 2.11).

Пример 3. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Исследуем ее на непрерывность в точке $x_0=0$. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\pi=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$. Так как последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится, то рассматриваемая функция в точке $x_0=0$ не имеет предела, т. е. в точке $x_0=0$ функция имеет разрыв второго рода.

Непрерывность некоторых элементарных функций. Постоянная функция $f(x)=C$, $\forall x\in X$, непрерывна в любой точке x_0, поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C$. Аналогично для всех $x\in\mathbf{R}$ непрерывными являются функции $f(x)=x$, многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и дробно-рациональная функция $g(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$, причем функция $g(x)$ непрерывна в тех точках x, где ее знаменатель отличен от нуля.

Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$ непрерывны в точках области определения. Докажем непрерывность $\sin x$ в лю-

бой точке $x_0 \in \mathbf{R}$. Имеем $|\Delta \sin x_0| = |\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x_0 + \Delta x}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$, так как $\left|\cos\frac{2x_0 + \Delta x}{2}\right| \leqslant 1$ и $|\sin \Delta x| \leqslant |\Delta x|$, $\forall \Delta x$. Отсюда следует, что если $|\Delta x| \leqslant \delta = \varepsilon$, то и $|\Delta \sin x_0| < \varepsilon$, т. е. $\sin x$ — непрерывная в любой точке $x \in \mathbf{R}$ функция.

Докажем непрерывность показательной функции $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$. Для определенности положим $a > 1$.

Составим разность $\Delta f(x_0) = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$ и покажем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$. Для этого решим неравенство

$$(|a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon) \Leftrightarrow (1 - \varepsilon < a^{\Delta x} < 1 + \varepsilon) \quad (1 - \varepsilon > 0).$$

Логарифмируя эти неравенства ($a > 1$!), получаем

$$\log_a(1 - \varepsilon) < \Delta x < \log_a(1 + \varepsilon) \Leftrightarrow -\log_a \frac{1}{1 - \varepsilon} < \Delta x < \log_a(1 + \varepsilon).$$

Отсюда видно, что для выполнения неравенства $|a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$ надо положить δ равным меньшему из двух положительных чисел $\log_a(1 + \varepsilon)$ и $\log_a \frac{1}{1 - \varepsilon}$. Тогда из неравенства $|\Delta x| < \delta$ будет следовать неравенство $|a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Для доказательства непрерывности логарифмической функции $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, в любой точке $x_0 > 0$ достаточно показать справедливость равенства $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(1 + x) = 0$, поскольку

$$\Delta f(x_0) = \log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right), \quad \left(x = \frac{\Delta x}{x_0}\right).$$

Действительно, из неравенства $-\varepsilon < \log_a(1 + x) < \varepsilon$ получаем неравенство $a^{-\varepsilon} < 1 + x < a^{\varepsilon}$, откуда $-(1 - a^{-\varepsilon}) < x < a^{\varepsilon} - 1$, $a > 1$.

Таким образом, неравенство $|\log_a(1 + x)| < \varepsilon$ будет выполнено, если в качестве δ выбрать наименьшее из двух положительных чисел $a^{\varepsilon} - 1$ и $1 - a^{-\varepsilon}$, т. е., действительно, $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(1 + x) = 0$.

Непрерывность степенной функции $f(x) = x^a$ при $x > 0$ вытекает из свойства непрерывности сложной функции и представления $x^a = e^{a \ln x}$. Если же функция x^a имеет смысл при $x < 0$ (например, x^4, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[3]{x}$), то при $a > 0$ она будет непрерывной при всех $x \in \mathbf{R}$, а при $a < 0$ — при всех $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = 0$.

Непрерывность обратных тригонометрических функций будет установлена в § 2.7.

Замечательные пределы. 1. Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.37}$$

Из определения тригонометрических функций и геометрических соображений (рис. 2.12) имеем $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ для достаточно малых x. Отсюда, деля на $\sin x > 0$, получаем

$$\left(1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\right) \Leftrightarrow \left(\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\right).$$

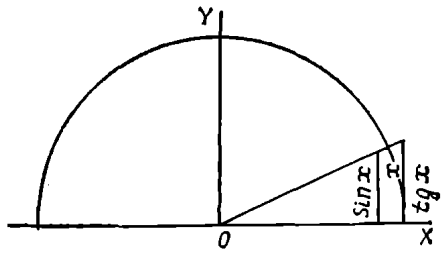


Рис. 2.12

В силу непрерывности $\cos x$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Поэтому, переходя к пределу в этих неравенствах, получим формулу (2.37).

2. Докажем теперь, что

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.38}$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $+\infty$, и пусть $k_n = [x_n]$ — целая часть x_n. Тогда $k_n \leqslant x_n \leqslant k_n + 1 \leqslant x_n + 1 < k_n + 2$ и

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n+1} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+2} = \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^2.$$

Так как $x_n \to +\infty$, то и $[x_n] = k_n \to +\infty$, причем $k_n \in \mathbf{N}$. Отсюда и из того, что $\lim\limits_{k_n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$, $\lim\limits_{k_n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^2 = 1$, получим

$$e \leqslant \lim_{x_n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant e \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Случай $x_n \to -\infty$ сводится к рассмотренному заменой $y = -x$.

Следствие.

$$\lim_{x \to \pm 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{2.39}$$

Для доказательства равенства (2.39) достаточно осуществить замену $\frac{1}{x} = y$, при этом $y \to \pm\infty$, если $x \to \pm 0$.

3. Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e, \tag{2.40}$$

в частности, при $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1. \tag{2.41}$$

В самом деле, используя непрерывность логарифмической функции и формулу (2.30), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e.$$

4. Покажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{2.42}$$

Положим $a^x-1=u$, тогда $a^x=1+u$. Если $x\to 0$, то, в силу непрерывности функции a^x при $x\to 0$, получаем $u\to 0$. Тогда $\frac{a^x-1}{x}=\frac{u}{\log_a(1+u)}=\frac{1}{\frac{\log_a(1+u)}{u}}$ и, согласно равенству (2.40),

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+u)}{u}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

В частном случае при $a=e$ из равенства (2.42) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{2.43}$$

5. Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha. \tag{2.44}$$

Введя замену $(1+x)^\alpha=e^y$, замечаем, что при $x\to 0$ будем иметь $y\to 0$. После несложных алгебраических преобразований получим, что $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{e^y-1}{\frac{1}{e^\alpha}y-1}$. Отсюда, согласно соотношению (2.36),

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{1}{e^\alpha}y-1}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)\left(\frac{\frac{1}{\alpha}y}{\frac{1}{e^\alpha}y-1}\right)\times$$

$$\times\,\alpha=1\cdot 1\cdot\alpha=\alpha.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}$.

Решение. Введем замену $x-1=y$, откуда следует, что если $x\to 1$, то $y\to 0$. Тогда по формуле (2.44) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^\alpha-1}{y}=\alpha$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Задачи и упражнения.

1. Доказать непрерывность функции $f(x) = 3x^2 - 3$ в точке $x_0 = 4$ (указать $\delta = \delta(\varepsilon)$).

2. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то и функция $g(x) = |f(x)|$ тоже непрерывна в этой точке. Верно ли обратное? Выяснить, является ли непрерывной в точке $x_0 = 0$ функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

и ее модуль.

3. Является ли функция $f(x) = \dfrac{\sin 10x}{x}$ ограниченной в окрестности точки $x_0 = 0$?

4. Установить характер точек разрыва и вычислить скачок функции в точках разрыва:

а) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 3; \\ x^2 - 1, & x > 3; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^2, & x < 0; \\ (2x - 8), & x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}, & x < 1; \\ x^2 - 1, & x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ 2^x - 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$

5. Доказать, что в некоторой окрестности точки разрыва первого рода числовая функция ограничена.

2.6. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Сравнение функций. Символы o и O. Пусть f, g и φ — функции, определенные в некоторой окрестности точки x_0. Функции f и g при $x \to x_0$ называются *функциями одинакового порядка*, если существует число $C > 0$ и окрестность $U_\delta(x_0)$, такие, что $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$. В этом случае пишут $f = O(g)$ и говорят, что «f есть O большое от g в окрестности точки x_0». Легко видеть, что если $f = O(g)$ при $x \to x_0$, то отношение f/g есть ограниченная функция.

Если для любого $\varepsilon > 0$ при $x \to x_0$ выполнено условие $|f(x)| < \varepsilon |\varphi(x)|$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0, то говорят, что функция f при $x \to x_0$ является *бесконечно малой по сравнению с функцией* φ, и обозначают этот факт следующим образом: $f = o(\varphi(x))$ (читается: «f есть o малое от φ при $x \to x_0$»).

В случае, когда $\varphi(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, то говорят, что f является бесконечно малой более высокого порядка, чем φ, если $f = o(\varphi)$.

Пример 1. а) $(x - x_0)^3 = o(x - x_0)$ при $x \to x_0$;
б) $x^n = o(x^m)$ при $x \to 0$, если $n > m$;
в) $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$, так как $|\sin x| \leqslant |x|$ при $x \to 0$.

Теорема 2.8. Следующие условия эквивалентны:
а) $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0$

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < \varepsilon \quad (\varphi(x) \neq 0); \tag{2.45}$$

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$; $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0$; (2.46)

г) $f(x) = \alpha(x) \cdot \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. (2.47)

Доказательство. По определению o малого в окрестности точки x_0

$$(f(x) = o(\varphi(x))) \Leftrightarrow (|f(x)| < \varepsilon |\varphi(x)|) \Leftrightarrow \left(\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0\right).$$

Этим самым установлена эквивалентность соотношений пп. а—в. Обозначив $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \alpha(x)$, из равенства (2.46) получаем

$$f(x) = \alpha(x) \cdot \varphi(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0. \blacksquare$$

Таким образом, из теоремы 2.8 следует, что соотношение $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$ означает тот факт, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. Это равенство является другим определением соотношения $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.

Эквивалентные функции. Главная часть функции. Говорят, что функции f и g, определенные в некоторой окрестности точки x_0, *эквивалентны* или *равны асимптотически* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, и обозначают это следующим образом: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Теорема 2.9. Для того чтобы две функции f и g были эквивалентны при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0. \tag{2.48}$$

Доказательство. Из равенства (2.46) следует, что

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad g(x) \neq 0, \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0,$$

т. е. равенство (2.48) означает, что $f(x) \sim g(x)$. Если же $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функция $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 = \dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)}$ стремится к нулю при $x \to x_0$, т. е. $f(x) - g(x) = \alpha(x) g(x) = o(g(x))$ в силу равенства (2.47). $\blacksquare$

При выполнении равенства (2.48) функция $g(x)$ называется *главной частью функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (или в окрестности точки x_0).

Следствие. Имеет место соотношение (докажите его!)

$$\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0\right)\Leftrightarrow(f(x)\sim A\cdot g(x),\ x\to x_0). \qquad (2.49)$$

Следующая теорема широко используется при вычислении пределов функций.

Теорема 2.10. Если f эквивалентна g при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot h(x); \qquad (2.50)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}.$$

Равенства (2.50) понимаются в том смысле, что если существуют пределы их правых частей, то существуют равные им пределы и левых частей.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то

$$\lim_{x\to x0} f(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\cdot h(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\times$$

$$\times\lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot h(x)]=\lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot h(x)].$$

Вторая из формул (2.50) доказывается аналогично. ■

Приложение эквивалентных функций к вычислению пределов. Приведем сначала примеры эквивалентных функций.

1. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

2. Так как $\operatorname{tg}x=\sin x/\cos x$, то при $x\to 0$, очевидно, $\operatorname{tg}x\sim x$.

3. Из соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ следует, что при $x\to 0$ $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

4. Из того, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, согласно соотношению (2.49), получаем, что $a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$. В частности, $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$.

5. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, то $\ln(1+x)\sim x$, $x\to 0$.

6. В силу того, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^\alpha-1}{x-1}=\alpha$, имеем $x^\alpha-1\sim\alpha(x-1)$ при $x\to 1$.

7. Зная, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$, получим $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ при $x\to 0$.

8. Положив $\sin x=y$, из соотношения $\sin x\sim x$ при $x\to 0$ получаем $y\sim\arcsin y$ при $y\to 0$, т. е. $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$.

9. Аналогично $\operatorname{arctg}x\sim x$ при $x\to 0$.

Полученные результаты сведем в *таблицу эквивалентных бесконечно малых:*

1. $\sin x \sim x$, $x \to 0$.
2. $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \to 0$.
3. $1 - \cos x \sim x^2/2$, $x \to 0$.
4. $a^x - 1 \sim x \ln a$, $x \to 0$.
5. $e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$.
6. $\ln(1+x) \sim x$, $x \to 0$.
7. $x^\alpha - 1 \sim \alpha(x-1)$, $x \to 1$.
8. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $x \to 0$.
9. $\arcsin x \sim x$, $x \to 0$.
10. $\operatorname{arctg} x \sim x$, $x \to 0$.

Эквивалентность функций и теорема (2.10) помогают вычислять пределы многих функций.

Приведем некоторые примеры раскрытия неопределенностей с помощью эквивалентных б.м.ф.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ $\left(\text{неопределенность типа } \dfrac{0}{0}\right)$.

Решение. Используя эквивалентные функции, находим $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(\cos x - 1)]}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} (2 - 3^{\sin^2 x})^{\frac{1}{\ln\cos x}}$ (неопределенность типа 1^∞).

Решение. Обозначим $y = (2 - 3^{\sin^2 x})^{\frac{1}{\ln\cos x}}$. Тогда $\ln y = \dfrac{\ln(2-3^{\sin^2 x})}{\ln\cos x} =$

$$= \frac{\ln[1+(1-3^{\sin^2 x})]}{\ln[1+(\cos x - 1)]}.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(1-3^{\sin^2 x})]}{\ln[1+(\cos x-1)]} = \lim_{x\to 0} \frac{1-3^{\sin^2 x}}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x \ln 3}{-\frac{x^2}{2}} = 2\ln 3.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} (2 - 3^{\sin^2 x})^{\frac{1}{\ln\cos x}} = e^{2\ln 3} = 9.$$

Задачи и упражнения.

1. Доказать, что:

а) $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)\cdot g(x))$;
б) $o(o(f(x))) = o(f(x))$;
в) $o(f(x)) \cdot O(g(x)) = o(f(x)\cdot g(x))$;
г) $o(O(f(x))) = o(f(x))$;
д) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$;
е) $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.

2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$;
б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;
в) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos 3x/2}-1}$;
г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^2 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{\cos(x/2)}}$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2+\cos x}{3+2x\sin x}^{\frac{2}{2x-\pi}}$.

3. Пусть $x\to+\infty$. Доказать, что:

а) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; в) $x+x^2\sin x=O(x^2)$.

4. Доказать асимптотическую формулу

$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to\infty.$$

2.7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства. Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причем непрерывность в точке a понимается как непрерывность справа, а в точке b — как непрерывность слева.

Непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции обладают рядом свойств, которые мы сформулируем в виде теорем. Предварительно докажем вспомогательную теорему.

Теорема 2.11 (Больцано — Вейерштрасса*). Из всякой ограниченной последовательности чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $[a, b]$ — отрезок, на котором располагается ограниченная последовательность $\{x_n\}$. Разделим его пополам и возьмем ту его половину $[a_1, b_1]$, на которой находится бесконечное число членов последовательности. Выберем на $[a_1, b_1]$ произвольный член данной последовательности $\{x_n\}$ и обозначим его через x_{n_1}. Отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и берем ту его часть $[a_2, b_2]$, где расположено бесконечное число членов последовательности. На $[a_2, b_2]$ выбираем произвольный член x_{n_2} данной последовательности, причем $n_2 > n_1$.

Продолжая этот процесс, получим, с одной стороны, последовательность вложенных стягивающихся отрезков, а с другой — подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для членов которой выполнено условие $x_{n_k}\in[a_n, b_n]$, $k\in\mathbb{N}$. Отсюда по теореме Кантора получаем, что существует такое число a, для которого $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$. Тогда из свойства 6° сходящейся последовательности следует, что и $\lim\limits_{n_k\to\infty}x_{n_k}=a$, т. е. подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходящаяся. ■

Докажем теперь следующее свойство функций, непрерывных на отрезке.

* Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик; К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

Теорема 2.12. Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем.

Доказательство. Предположим, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a, b]$, такая, что $|f(x_n)| > n$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ ($a \leqslant x_n \leqslant b$!), в силу теоремы 2.11, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $a \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = c \leqslant b$. Тогда, с одной стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$, в силу неограниченности $\{f(x_n)\}$, а с другой — $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(c)| < \infty$, в силу непрерывности f. Это противоречие говорит о том, что f не может быть неограниченной на $[a, b]$. ■

Назовем *точной верхней (нижней) гранью функции* $f: X \to Y$ точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений функции $Y = f(X)$, т. е. точная верхняя (нижняя) грань функции f есть число $M(m)$, равное $M = \sup\limits_{x\in X} f(x) = \sup\limits_{y\in Y} y$ $\left(m = \inf\limits_{x\in X} f(x) = \inf\limits_{y\in Y} y\right)$.

Теорема 2.13 (Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.

Доказательство. По предыдущей теореме функция f ограничена на $[a, b]$. Тогда по аксиоме о верхней (нижней) грани существует точная верхняя (нижняя) грань f на $[a, b]$: $\sup\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = M$ $\left(\inf\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = m\right)$. Покажем, что существуют такие числа $\alpha, \beta \in [a, b]$, что $\sup\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = f(\beta) = M$ $\left(\inf\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = f(\alpha) = m\right)$.

По свойству точной верхней грани для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $x_n \in [a, b]$, что $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу $\beta \in [a, b]$, причем $M - \frac{1}{n_k} \leqslant f(x_{n_k}) \leqslant M$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $n_k \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$, а с другой стороны, $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$, так как f непрерывна. В силу единственности предела $f(\beta) = M$.

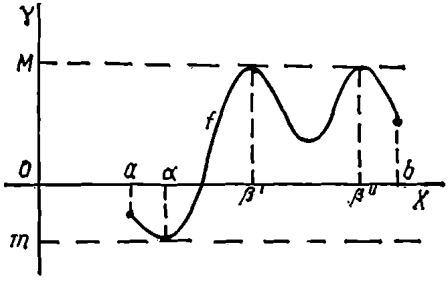


Рис. 2.13

Доказательство второй части теоремы с точной нижней грани аналогично. ■

Заметим, что точки α и β, в которых достигаются точные нижняя и верхняя грани функции f на отрезке $[a, b]$, не обязательно должны быть единственными (рис. 2.13).

Точная верхняя грань M непрерывной на отрезке $[a, b]$ функ-

ции f называется *максимумом функции на этом отрезке* и обозначается $\max\limits_{[a,\,b]} f(x) = \sup\limits_{[a,\,b]} f(x) = M$. Аналогично *минимумом функции f на отрезке* $[a, b]$ называется ее точная нижняя грань m на этом отрезке, т. е. $\min\limits_{[a,\,b]} f(x) = \inf\limits_{[a,\,b]} f(x) = m$.

Теорема 2.13 утверждает, что значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f заключены между ее максимальным и минимальным значениями, т. е. $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$ (рис. 2.13).

Отметим, что если функция f непрерывна на интервале (a, b), то она, вообще говоря, не достигает максимума и минимума на нем. Например, для функции $f(x) = x^2$, определенной на интервале $(-1, 1)$, $\max\limits_{(-1,\,1)} f(x) = M = 1$, но ни в одной точке этого интервала это значение не достигается. Минимальное же значение $m = \min\limits_{(-1,\,1)} f(x) = 0$ достигается в точке $x = 0$.

Теорема 2.14 (Больцано — Коши о промежуточном значении). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$, то для любого значения C, такого, что $A \leqslant C \leqslant B$, существует точка $\xi \in [a, b]$, для которой $f(\xi) = C$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(a) = A < B = f(b)$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0' пополам. Тогда, если $f(x_0) \neq C$, то возьмем ту половину $[a_1, b_1]$ отрезка $[a, b]$, для которой $f(a_1) < C < f(b_1)$. Если же $f(x_0') = C$, то $\xi = x_0'$. Снова разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой x_1'. Если $f(x_1) = C$, то искомая точка $\xi = x_1$ найдена. Если же $f(x_1) \neq C$, то берем опять ту половину $[a_2, b_2]$ отрезка $[a_1, b_1]$, для которой $f(a_2) < C < f(b_2)$. Таким образом, либо через конечное число шагов получим такую точку $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = C$, и тем самым теорема доказана, либо получим последовательность вложенных стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $f(a_n) < C < f(b_n)$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, с учетом равенства $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ получаем, что $f(\xi) = C$. ■

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка x_0, в которой $f(x_0) = 0$.

Геометрическая иллюстрация теоремы 2.14 и ее следствия изображены на рис. 2.14.

Метод доказательства теоремы 2.14 (метод деления отрезка пополам) лежит в основе приближенного решения уравнений $f(x) = 0$. Для этого определяют такой отрезок $[a, b]$, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда на отрезке $[a,$

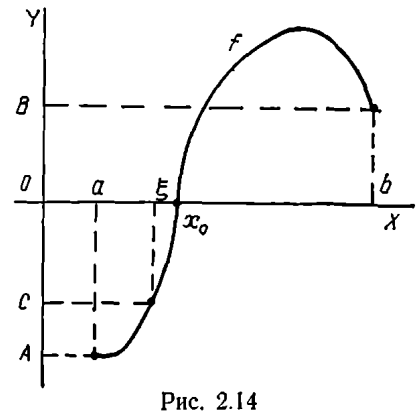


Рис. 2.14

$b]$, согласно следствию, имеется хотя бы один корень искомого уравнения.

Делением отрезка $[a, b]$ пополам определяют последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{b_n - a_n}{2}\right\}$, где $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Непрерывность обратной функции. Функция f называется *строго возрастающей (убывающей)* на $[a, b]$, если для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$, таких, что $x_1 < x_2$, следует $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Функция, строго возрастающая (убывающая), называется *строго монотонной.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.15. Если функция f строго возрастающая (убывающая) на отрезке $[a, b]$ и $[A, B]$ — множество ее значений, то существует обратная функция f^{-1}, являющаяся однозначной строго возрастающей (убывающей) на $[A, B]$.

Доказательство. Пусть для определенности f строго возрастает на $[a, b]$. Это значит, по определению, что $f(x_1) < f(x_2)$, если $x_1 < x_2$, т. е. $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$. Отсюда следует, что функция f взаимно-однозначна. В таком случае для нее существует обратная функция f^{-1}. Покажем, что f^{-1} строго возрастает на $[A, B]$.

Действительно, пусть $y_1 < y_2$, где $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$. Если бы $x_1 \geqslant x_2$, где $x_1 = f^{-1}(y_1)$; $x_2 = f^{-1}(y_2)$, то в силу строгой монотонности f $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию $y_1 < y_2$.

Доказательство для случая строго убывающей функции аналогичное. ■

Теорема 2.16. Если функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[A, B]$, где $A = f(a)$, $B = f(b)$.

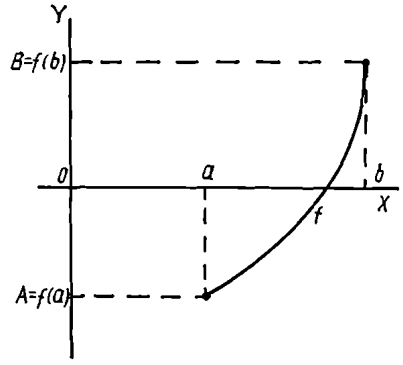


Рис. 2.15

Доказательство. Пусть для определенности f монотонно возрастает на $[a, b]$ (для убывающей функции доказательство аналогичное). Тогда по теореме Вейерштрасса она принимает на $[a, b]$ максимальное и минимальное значения B и A, $A < B$, соответственно. Так как $a < b$, то в силу возрастания $A = f(a)$; $B = f(b)$. По теореме 2.14 функция f принимает все промежуточные значения между A и B, т. е. $f([a, b]) = [A, B]$ (рис. 2.15).

Покажем, что f^{-1} непрерывна на $[A, B]$. Зададим произвольную точку $y_0 \in (A, B)$. Тогда $x_0 = f^{-1}(y_0)$, причем в силу строгого возрастания функции f^{-1} имеем $a < x_0 < b$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, такое, что

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \qquad (2.51)$$

Обозначим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$; $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда из неравенства (2.51) в силу строгого возрастания f имеем

$$A \leqslant y_1 \leqslant y_0 \leqslant y_2 \leqslant B.$$

Выберем $\delta > 0$, такое, что $y_1 \leqslant y_0 - \delta \leqslant y_0 + \delta \leqslant y_2$. Если взять y так, что $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, то тем более $y_1 < y < y_2$, а, значит, в силу строгого возрастания f^{-1} имеет место неравенство $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon$.

В итоге для $\varepsilon > 0$ указано $\delta > 0$, такое, что $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$, $\forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, т. е. функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Если $y_0 = A$ или $y_0 = B$, то аналогично доказывается, что функция f^{-1} непрерывна справа в точке A и непрерывна слева в точке B. ■

Непрерывность *обратных тригонометрических функций* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ в области их определения следует из теорем 2.15 и 2.16 и из непрерывности и строгой монотонности функций $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ на $[0, \pi]$, $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$.

Равномерная непрерывность. Пусть f — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $x_0 \in [a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, такое, что как только $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. При этом в общем случае величина δ зависит как от числа $\varepsilon > 0$, так и от точки x_0.

Функция f называется *равномерно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$.

Другими словами, функция f называется равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon))\,(\forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta): \\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \qquad (2.52)$$

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывна на отрезке $[1, 3]$.

Решение. Рассмотрим неравенство

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''|\,|x' + x''| < \varepsilon.$$

Оно будет выполнено, если $|x' - x''| < \dfrac{\varepsilon}{|x' + x''|}$. При x' и x'' из $[1, 3]$ сумма $x' + x''$ будет максимальной, если $x' = x'' = 3$. Взяв $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$, получим $\left(|x' - x''| < \dfrac{\varepsilon}{6}\right) \Rightarrow (|x'^2 - x''^2| < \varepsilon)$, т. е. функция $f(x) = x^2$ равномерно непрерывна на $[1, 3]$.

Пример 2. Покажем, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, непрерывная на интервале $(0, 1)$, не является равномерно непрерывной на нем. Достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ нельзя выбрать $\delta > 0$, такое, чтобы из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следовало неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, $\forall x', x'' \in (0, 1)$.

В самом деле, если $x' \in (0, 1)$ и $x'' = \left(x' + \frac{\delta}{2}\right) \in (0, 1)$, то

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \frac{|x'' - x'|}{|x'| \cdot |x''|} = \frac{\delta}{2\left(x' + \frac{\delta}{2}\right)x'}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $0 < x' < \frac{\sqrt{\delta^2\varepsilon^2 + 8\delta\varepsilon} - \delta\varepsilon}{4\varepsilon}$, $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$. Тогда из неравенства $|x'' - x'| < \delta$ будет следовать неравенство

$$|f(x') - f(x'')| = \frac{\delta}{2\left(x' + \frac{\delta}{2}\right)x'} > \varepsilon.$$

Таким образом, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$.

Теорема 2.17 (Кантора). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. Предположим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не является равномерно непрерывной на нем. Следовательно, существует $\varepsilon^* > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$, в частности для $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, найдется пара точек $x' = x'_n$ и $x'' = x''_n$ из $[a, b]$, для которых $\left(|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon^*\right)$. Из ограниченных последовательностей $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ можно выделить сходящиеся подпоследовательности $\{x'_{n_k}\}$ и $\{x''_{n_k}\}$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = x'_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x''_0$, то в силу неравенства $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ из соотношения $|x'_0 - x''_0| \leqslant |x'_0 - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x''_{n_k}| + |x''_{n_k} - x''_0|$ следует, что, устремив n_k к ∞, получим $|x'_0 - x''_0| = 0$ $(n \to \infty!)$, т. е. $x'_0 = x''_0 = x_0$.

В силу непрерывности f в точке $x_0 \in [a, b]$ для любого $\varepsilon^* > 0$ можно указать N, такой, что

$$(\forall n_k \geqslant N) \Rightarrow \left(|f(x'_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon^*}{2},\ |f(x''_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon^*}{2}\right).$$

Отсюда по свойству модуля имеем

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \leqslant |f(x'_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{2} = \varepsilon^*,$$

что противоречит полученному ранее неравенству $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon^*$. Это противоречие и доказывает теорему. ■

Задачи и упражнения.

1. Имеет ли уравнение $x^5 - 18x + 2 = 0$ корни, принадлежащие отрезку $[-1, 1]$?

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 \leqslant x < 0; \\ -(x^2 + 2), & 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Существует ли на отрезке $[-2, 2]$ точка x_0, в которой $f(x_0) = 0$?

3. Принимает ли функция $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ значение $2\frac{1}{3}$ внутри отрезка $[-2, 2]$?

4. Доказать равномерную непрерывность функции $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[1, 5]$. Указать соответствующее δ.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Одним из основных понятий математического анализа является понятие производной.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. *Производной функции* f в точке x_0 называется число, обозначаемое $f'(x_0)$ и равное пределу разностного отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если $x \to x_0$, т. е., по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{3.1}$$

если этот предел существует.

Полагая $x - x_0 = \Delta x$, из формулы (3.1) получаем другое определение производной функции f в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \tag{3.2}$$

т. е. *производная функции f в точке x_0 есть предел отношения ее приращения $\Delta f(x_0)$ в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx*, если $\Delta x \to 0$.

Производная функции f в точке x_0 обозначается также одним из следующих символов: $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'_x(x_0)$, $f'_x|x=x_0$.

Если функция f определена в некоторой правой (левой) окрестности точки x_0, то *правой (левой) производной* функции f в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \left(f'(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) \tag{3.3}$$

или

$$f'(x_0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \left(f'(x_0-0) = \right.$$
$$\left. = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \right). \tag{3.4}$$

Правая и левая производные функции f в точке x_0 называются *односторонними производными* функции в этой точке.

Очевидно, существование производной функции в точке равносильно равенству ее односторонних производных в этой точке.

Пример 1. Найти $f'(-2)$ для функции $f(x) = 3x^2 + 1$.

Решение. По определению,

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(-2+\Delta x)^2 + 1 - 3(-2)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-12\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = -12.$$

Пример 2. Найти односторонние производные функции $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. По определению,

$$f'(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1;$$

$$f'(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Таким образом, для функции $f(x) = |x|$ односторонние производные в точке $x_0 = 0$ существуют, но не равны между собой, т. е. в точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = |x|$ производной не имеет.

Выясним геометрический смысл производной функции f в данной точке x_0.

Пусть f — непрерывная функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим две точки $A = (x_0, f(x_0))$ и $B = (x_1, f(x_1))$ графика этой функции, через которые проходит единственная прямая l, заданная каноническим уравнением

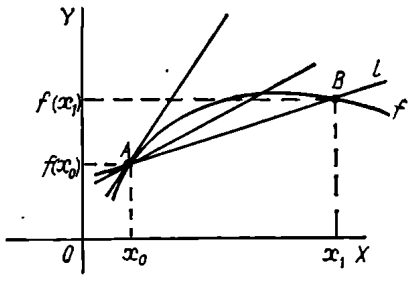


Рис. 3.1

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}, \tag{3.5}$$

где x, y — координаты переменной точки прямой l (рис. 3.1). Уравнение (3.5) является уравнением секущей, проходящей через точки A и B графика функции f. Его можно привести к виду

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что угловой коэффициент секущей

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.7}$$

Если точка B, двигаясь по графику непрерывной функции f, приближается к A, а секущая l при этом стремится к некоторому предельному положению, то это предельное положение секущей называется *касательной к графику функции f в точке x_0*. При этом касательная существует, если, как следует из уравнений (3.6) и (3.7), существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$, который называется *угловым коэффициентом касательной* к графику функции f в точке $A = (x_0, f(x_0))$. Таким образом, производная функции f в

точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$.

Из уравнения (3.6) вытекает, что уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.8}$$

Прямая, перпендикулярная к касательной графика функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, называется *нормалью* к кривой, определяемой функцией f, в этой точке. Поскольку угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$, то отсюда, предполагая, что $f'(x_0) \neq 0$, получаем: угловой коэффициент нормали $k_н = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а уравнение нормали к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.9}$$

Пример 3. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^2$ в точке (2, 4).

Решение. Находим угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2} = 4$. Тогда угловой коэффициент нормали $k_н = -\dfrac{1}{4}$. Согласно равенствам (3.8) и (3.9), искомые уравнения касательной и нормали имеют соответственно вид

$$y = 4(x - 2) + 4 \Rightarrow y = 4x - 4 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{4}(x - 2) + 4 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0.$$

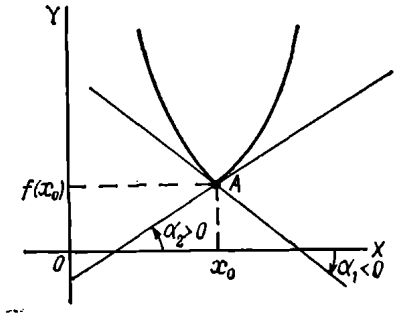


Рис. 3.2

Если функция f в точке $A = (x_0, f(x_0))$ имеет односторонние производные, не равные между собой, то в этом случае можно говорить о правой и левой касательных с угловыми коэффициентами $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$, равными $\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_0 - 0)$ и $\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_0 + 0)$ соответственно (рис. 3.2). Тогда A есть угловая точка графика функции f.

Может оказаться, что производная функции f в точке x_0 бесконечна. При этом возможны следующие случаи:

1) $f'(x_0) = +\infty$; 2) $f'(x_0) = -\infty$;
3) $f'(x_0 - 0) = -\infty$, $f'(x_0 + 0) = +\infty$;
4) $f'(x_0 - 0) = +\infty$, $f'(x_0 + 0) = -\infty$.

На рис. 3.3 изображены примеры расположения касательной к графику f в точке A, отвечающие случаям 1—4 соответственно.

Выясним теперь механический смысл производной функции f в точке x_0.

Пусть точка M движется прямолинейно и $s(x)$ — путь, проходимый ею за время x. Тогда отношение изменения пути $s(x) - s(x_0)$ ко времени $x - x_0$ есть средняя скорость движения точки за это время, а предел $s'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0}$ есть, очевидно, мгновенная скорость движения точки в момент времени x_0.

Таким образом, *мгновенная скорость есть производная пройденного пути $s(x)$ по времени x в данной точке x_0.*

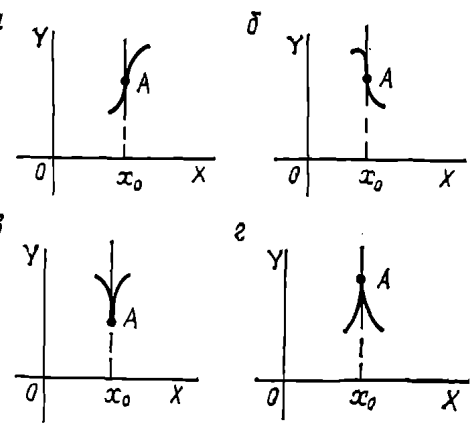


Рис. 3.3

Основные правила дифференцирования. Операция вычисления производной функции называется *дифференцированием*. Отметим, что если функция f имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Это следует из теоремы 2.7 о связи функции, ее предела и б.м.ф., в соответствии с которой $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Отсюда видно, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$, т. е. f непрерывна в точке x_0.

Функция, имеющая производную в точке x, называется *дифференцируемой* в этой точке. Более глубокий смысл понятия дифференцируемости будет выяснен в следующем параграфе.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то функции $u + v$, $u \cdot v$ и u/v $(v(x) \neq 0)$ дифференцируемы в этой точке, причем*

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(uv)' = u'v + v'u; \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Формулы (3.10) носят название *основных формул дифференцирования* и известны из курса элементарной математики.

Для примера докажем вторую формулу из равенств (3.10). Действительно, по определению,

$$[u(x) \cdot v(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x + \Delta x) + u(x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} u(x) =$$

$$= u'(x) v(x) + v'(x) u(x).$$

в силу дифференцируемости u и v, а значит, и их непрерывности в точке x. ■

Теорема 3.2 (дифференцирование сложной функции). Если функция g дифференцируема в точке x_0, а функция f дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $F(x) = f[g(x)]$ дифференцируема в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f'(y_0) g'(x_0), \quad y = g(x). \tag{3.11}$$

Доказательство. По определению,

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

При $x \to x_0$ функция $y = g(x)$ в силу непрерывности стремится к $y_0 = g(x_0)$. Тогда с учетом равенства (2.36)

$$F'(x_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

в силу дифференцируемости f и g в точках y_0 и x_0 соответственно.

Тем самым теорема доказана для случая, когда при $x \to x_0$ функция $y \to y_0$, $y \neq y_0$.

Если же при $x \to x_0$ окажется $y = y_0$, то поступаем следующим образом. Так как функция $z = f(y)$ имеет производную при $y = y_0$, то, согласно теореме о связи функции, ее предела и б.м.ф., можно записать

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = f'(y_0) + \alpha(\Delta y), \quad \Delta y = y - y_0$$

или

$$\Delta z = [f'(y_0) + \alpha(\Delta y)] \Delta y, \quad \Delta y = y - y_0,$$

причем $\alpha(\Delta y) \to 0$, если $\Delta y \to 0$. Это равенство справедливо и для $\Delta y = 0$ при любом выборе функции $\alpha(\Delta y)$, ибо при $\Delta y \to 0$ и $\Delta z = 0$. Положим $\alpha(0) = 0$. Доопределенная таким образом функция $\alpha(\Delta y)$ непрерывна при $\Delta y = 0$. Разделив теперь последнее равенство на Δx с учетом только что сделанного замечания в пределе при $\Delta x \to 0$, снова придем к формуле (3.11). ■

Производные элементарных функций. 1. *Постоянная функция.* Пусть $f(x) = C$, $\forall x \in \mathbf{R}$, где $C = \text{const}$. Для производной $f'(x)$ имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

Итак, производная постоянной функции равна нулю в любой точке x.

2. *Показательная функция.* Для функции $f(x) = a^x$, $a > 0$,

$a \neq 1$, производная f' в любой точке x с учетом формулы (2.42) равна

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Итак, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

3. *Степенная функция.* Для функции $f(x) = x^a$, $a \in \mathbf{R}$, с учетом формулы (2.44) находим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\Delta x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Следовательно, $(x^a)' = a x^{a-1}$.

4. *Логарифмическая функция.* Пусть $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Тогда, согласно формуле (2.40),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Итак, $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$, $\forall x > 0$. В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. *Тригонометрические функции.* Рассмотрим функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Имеем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\Big] \cdot (-1) = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. *Гиперболические функции.* Гиперболические функции определим следующим образом: гиперболический синус $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; гиперболический тангенс $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; гиперболический котангенс $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Для них, используя теорему 3.1, получаем

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Производная обратной функции. Пусть $f: X \to Y$ — взаимно-од-

нозначная функция и f^{-1} — обратная для нее. Тогда, согласно соотношениям (1.4) и (1.5),

$$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x, \quad \forall x \in X; \quad f[f^{-1}(y)] = f(x) = y, \quad \forall y \in Y.$$

Отсюда по теореме 3.2 находим

$$(f^{-1}[f(x)])' = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = (x)' = 1,$$

т. е. для производной обратной функции справедливо соотношение

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}, \quad y = f(x). \tag{3.12}$$

Применим формулу (3.12) к обратным тригонометрическим функциям. Пусть $y = f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда $f^{-1}(y) = \sin y = x$. Тогда из соотношения (3.12) имеем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

так как $\cos y > 0$, если $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

Аналогично для $y = f(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$, получаем $f^{-1}(y) = \cos y = x$ и, следовательно,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

поскольку $\sin y > 0$, если $y \in (0, \pi)$.

Итак, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

Пусть $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда $f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y = x$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Аналогично доказывается, что $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Логарифмическая производная. Для нахождения производных сложных функций иногда удобно пользоваться следующим приемом.

Пусть $y = f(x) > 0$ — некоторая функция. Образуем функцию $\ln y = \ln f(x)$ и вычислим ее производную $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Отсюда находим искомую производную

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'. \tag{3.13}$$

Пример 4. Пусть $f(x) = x^x$, $x > 0$. Для этой функции $(\ln x^x = x \ln x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{x^x}(x^x)' = \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow ((x^x)' = x^x(1 + \ln x))$.

Пример 5. В общем случае пусть $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$. Прологарифми-

ровав обе части равенства, получим $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$. Отсюда, дифференцируя, находим

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

т. е.

$$[u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Запоминать эту формулу не стоит, гораздо полезней и проще усвоить схему вычисления логарифмической производной.

Таблица основных производных. Полученные результаты сведем в следующую таблицу:

1) $(x^a)' = ax^{a-1}$;
2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(0 < a \neq 1)$;
3) $(e^x)' = e^x$;
4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$, $(x > 0,\ 0 < a \neq 1)$;
5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$;
6) $(\sin x)' = \cos x$;
7) $(\cos x)' = -\sin x$;
8) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right)$;
9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$;
10) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
11) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
12) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
13) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;
14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(|x| < 1)$;
15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(|x| < 1)$;
16) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$;
17) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Эта таблица вместе с основными формулами дифференцирования (3.10) и правилом дифференцирования сложной функции составляет основу дифференциального исчисления.

Задачи и упражнения.

1. Доказать единственность производной функции в точке.
2. Исходя из определения, найти $f'(0)$:

а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(e^{x \sin \frac{5}{x}} - 1\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. Вычислить в точке x_0 правую и левую производные функции $f(x) = |x - x_0|\varphi x$, причем $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0. При каком условии эта функция дифференцируема при $x = x_0$?

4. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{x+1}$ в точке $x_0 = 3$.

5. Найти производные следующих функций:

а) $y = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x)$; б) $y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2}\sqrt{4x - x^2}$;

в) $y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$; г) $y = \frac{\sqrt[7]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{(1+x)(2-x)}}{\sqrt[5]{x^4}}$.

6. Доказать:

а) $(\sqrt{ax^2 + bx + c})' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$;

б) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; в) $[\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

г) $\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; д) $\left[\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|\right]' = \frac{1}{\sin x}$.

7. Доказать равенства:

а) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; б) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$;

в) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$;

г) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$.

3.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференцируемость функции. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение в этой точке $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \tag{3.14}$$

где A — некоторое действительное число, а $o(\Delta x)$ — б.м.ф. более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Из формулы (3.14) видно, что для дифференцируемой в точке x_0 функции имеет место равенство

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x). \tag{3.15}$$

Теорема 3.3. Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала производная $f'(x_0) = A$.

Доказательство. *Необходимость.* Если f дифференцируема в точке x_0, то из определений (3.14) и (3.2) имеем $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Достаточность. Если $A = f'(x_0)$, то по теореме 2.7 в окрестности точки x_0 имеет место равенство $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — б.м.ф. при $\Delta x \to 0$. Отсюда, умножая обе части равенства на Δx, приходим к формуле (3.14). ■

Из теоремы 3.3 и формулы (3.14) следует, что если функция f в точке x_0 дифференцируема, то она непрерывна в этой точке. Сбратное, вообще говоря, неверно, т. е. из непрерывности функции f в

точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость. Например, функция $|x|$, являясь непрерывной в точке $x_0 = 0$, не является дифференцируемой в ней.

Дифференциал функции, его геометрический смысл. Итак, функция f дифференцируема в точке x_0, если ее приращение в этой точке, согласно равенству (3.15) и теореме 3.3, представимо в виде

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)(x - x_0 = \Delta x). \qquad (3.16)$$

Отсюда, если $f'(x_0) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{o(x - x_0)}{|f'(x_0)(x - x_0)}\right) = 1.$$

Следовательно, при $x \to x_0$ функции $f(x) - f(x_0)$ и $f'(x_0)(x - x_0)$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями.

Функция $f'(x_0)(x - x_0)$ является главным (линейным) членом приращения функции f при $x \to x_0$.

Главная линейная часть приращения функции f в точке x_0 называется *дифференциалом функции* в этой точке и обозначается $df(x_0)$.

Таким образом, по определению, $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ или $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. В частности, для $y = x$ $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции f в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\,dx. \qquad (3.17)$$

Геометрический смысл дифференциала функции $y = f(x_0)$ в точке x_0 вытекает из равенства (3.16) и рис. 3.4. Здесь $BC = f'(x_0) \cdot (x - x_0) = df(x_0)$; $BD = f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$; $CD = o(|x - x_0|)$.

Таким образом, дифференциал функции равен приращению BC ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 при том же приращении аргумента $x - x_0$.

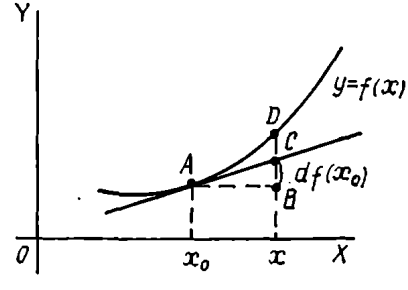


Рис. 3.4

Для дифференциалов функций f и g справедливы следующие формулы:

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg;$$
$$d(f \cdot g) = g\,df + f\,dg; \qquad (3.18)$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

Их справедливость следует из формул (3.10) и определения дифференциала.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях. С помощью дифференциала можно приближенно вычислять значения функции f для x, близких к x_0.

В силу равенств (3.17) и (3.16) имеем $f(x) = f(x_0) + df(x_0) + o(x - x_0)$. Пренебрегая членом $o(x - x_0)$, получим приближенно

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (3.19)$$

Полученная формула и лежит в основе приближенного вычисления значений функции в точке $x = x_0 + \Delta x$.

Пример 1. Найти приближенное значение функции $y = \ln x$ в точке $x = 1,1$.

Решение. Положим $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$. Поскольку $f'(1) = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1$; $f(1) = \ln 1 = 0$, то по формуле (3.19) $\ln 1,1 \approx \ln 1 + f'(1) \cdot \Delta x = 1 \cdot 0,1 = 0,1$.

Пример 2. Вычислить приближенно $\sqrt{0,8}$.

Решение. Пусть $x_0 = 1$. Тогда $\Delta x = 0,8 - 1 = -0,2$. Поскольку $f(x) = \sqrt{x}$, то $f'(1) = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x_0=1} = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$. Следовательно, $\sqrt{0,8} \approx 1 + \frac{\Delta x}{2} = 0,9$.

Инвариантность формы дифференциала. Рассмотрим сложную функцию $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, и найдем ее дифференциал.

Если x — независимая переменная, то, по определению,

$$dy = f'(x) \cdot dx, \qquad (3.20)$$

где $dx = \Delta x$. Если же независимой переменной служит t, то

$$dy = y'_t \cdot dt = (y'_x \cdot x'_t)\, dt = y'_x (x'_t \cdot dt) = y'_x dx,$$

т. е. и в этом случае

$$dy = f'(x) \cdot dx. \qquad (3.21)$$

Формулы (3.20) и (3.21), совпадающие по форме, имеют различный смысл: в формуле (3.20) $dx = \Delta x$, а в формуле (3.21) — $dx = x'_t dt$.

Таким образом, дифференциал функции всегда равен произведению производной на дифференциал аргумента и не зависит от того, является ли величина, по которой взята производная, независимой переменной или же только промежуточным аргументом, который сам зависит от другой, уже независимой переменной. В этом и заключается свойство инвариантности формы дифференциала.

Из формул (3.20) и (3.21) следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функции в точке численно равна отношению дифференциалов функций dy и переменной dx независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией $x = \varphi(t)$.

Задачи и упражнения.

1. Найти dy:

а) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \frac{1}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$; б) $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$;

в) $y = \ln(\cos^2 x) + \sqrt{1 + \cos^4 x}$.

2. Вычислить приближенно:

а) $y_0 = \sqrt{4x_0 - 3}$, $x_0 = 0,78$; б) $y_0 = \sqrt[3]{3x_0 + \cos x_0}$, $x_0 = 0,01$.

Производные высших порядков. Пусть $f: X \to Y$ — функция, дифференцируемая в каждой точке $x \in X$. Ее производная в точке x есть некоторая функция $g(x) = f'(x)$. Если функция g дифференцируема, то имеет смысл определить ее производную $g'(x) = [f'(x)]'$, которая называется *второй производной* функции f и обозначается $f''(x)$. Таким образом, $f''(x) = [f'(x)]'$. Аналогично $f''(x)$ может оказаться дифференцируемой функцией в точке x, тогда $f'''(x) = [f''(x)]'$ есть *третья производная* функции f. Точно так же, если в точке x определена производная порядка $n-1$ функции f, то *производная порядка* n или *n-я производная* функции f определяется формулой

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.22}$$

Отметим, что в формуле (3.22) принято $f^{(0)}(x) = f(x)$, т. е. *производная нулевого порядка есть сама функция.*

Для n-й производной функции f применяются еще и другие обозначения: $f^{(n)}_{\underbrace{xx\ldots x}_{n}}(x)$ или $f^{(n)}_{x^n}(x)$.

Функция f называется n раз дифференцируемой в точке $x \in X$, если в этой точке у нее существуют все производные до n-го порядка включительно. Если f дифференцируема n раз в каждой точке x из X и $f^{(n)}$ является непрерывной функцией на X, то f называется n раз непрерывно дифференцируемой функцией или функцией класса $C^{(n)}[X]$. Множество непрерывных функций, определенных на X, обозначается $C[X]$. Функция, имеющая производную любого порядка, называется *бесконечно дифференцируемой*. Таковой является, например, функция e^x.

Пример 1. Пусть $f(x) = \sin x$. Найти производную n-го порядка данной функции.

Решение. Для этой функции последовательно находим:

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot x\right);$$

$$f''(x) = (\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f'''(x) = (\sin x)''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right);$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично для функции $f(x) = \cos x$ получим:

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = -\sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пример 2. Пусть $y = f(x)$ — взаимно-однозначная функция, для которой $f'(x) \neq 0$. Вычислить вторую производную для обратной функции f^{-1}.

Решение. Для обратной функции $x = f^{-1}(y) = x(y)$ первая производная дается равенством $[f^{-1}(y)]'_y = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'_x[x(y)]}$. Отсюда, используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$[f^{-1}(y)]''_{yy} = \left(\frac{1}{f'[x(y)]}\right)'_y = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)} \cdot x'(y) = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}.$$

Дифференцирование параметрически заданных функций. Пусть зависимость y от x задана через параметр t, а именно:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t); \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \in T). \tag{3.23}$$

Такое задание функции называется *параметрическим*. Его надо понимать в том смысле, что если функция φ имеет обратную φ^{-1}, т. е. $t = \varphi^{-1}(x)$, то $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$.

Обычное задание функции в виде $y = f(x)$ можно рассматривать как частный случай параметрического, если положить $x = t$: $y = f(t) = \psi(t)$.

Для нахождения производной функции, заданной параметрически, воспользуемся свойством инвариантности дифференциала, в соответствии с которым $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$. Но $dy = y'_t dt$; $dx = x'_t dt$. Поэтому

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (x'_t \neq 0). \tag{3.24}$$

Пример 3. Пусть $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$. Найти y'_x в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Используя формулу (3.24), находим $y'_x(t_0) = \left.\dfrac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$

Найдем теперь вторую производную для параметрически заданной функции. Из формулы (3.24) получаем новую параметрически заданную функцию

$$x = \varphi(t); \; y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \; t \in T.$$

Тогда вторая производная $(y'_x)'_x$ функции, заданной параметрически (обозначается y''_{xx} или y''_{x^2}), находится в соответствии с равенством (3.24) по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{3.25}$$

Аналогично, если известно выражение для $y^{(n-1)}_{x^{n-1}}$, то

$$y^{(n)}_{x^n} = \frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Пример 4. Найти y'''_{x^3} для функции $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

Решение. Имеем $y'_x = \frac{-e^{-t}}{e^t} = -e^{-2t}$; $y_{xx} = \frac{2e^{-2t}}{e} = 2e^{-3t}$; $y'''_{x^3} = \frac{-6e^{-3t}}{e^t} = (-1)^3 3! e^{-4t}$.

В общем случае легко убедиться, что

$$f^{(n)}_{x^n} = (-1)^n n! e^{-(n+1)t} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Бином Ньютона. Рассмотрим функцию вида $P_n(x) = (x + a)^n$, представляющую собой, очевидно, многочлен n-й степени:

$$P_n(x) = (x + a)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n \qquad (3.26)$$

с коэффициентами A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Найдем эти коэффициенты.

При $x = 0$ имеем $A_0 = a^n$. Продифференцируем обе части равенства (3.26) и получим

$$n(x + a)^{n-1} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1}. \qquad (3.27)$$

Отсюда при $x = 0$ имеем $na^{n-1} = A_1$. Продифференцировав теперь обе части равенства (3.27), найдем

$$n(n-1)(x + a)^{n-2} = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + 3 \cdot 4A_4 x^2 + \ldots + (n-1)nA_n x^{n-2}, \qquad (3.28)$$

откуда при $x = 0$ имеем $(n-1)na^{n-2} = 2A_2$, т. е. $A_2 = \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}$.

Продифференцировав равенство (3.28), при $x = 0$ находим, что

$$((n-2)(n-1)na^{n-3} = 2 \cdot 3 \cdot A_3) \Rightarrow A_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}.$$

Поступая далее аналогично, получим

$$A_m = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} a^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n \ (0! = 1).$$

Подставив теперь A_m в равенство (3.26), находим формулу

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n.$$

Отсюда при $a = 1$ получаем формулу *бинома Ньютона*

$$(1 + x)^n = 1 + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots + x^n. \qquad (3.29)$$

Коэффициенты $1, n, \frac{n(n-1)}{2!}, \ldots, \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}, \ldots, 1$ называются *биномиальными коэффициентами* и обозначаются C_n^m, т. е.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}. \tag{3.30}$$

Умножив числитель и знаменатель коэффициента C_n^m на $(n-m)!$, получим

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)(n-m)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{3.31}$$

Покажем, что биномиальные коэффициенты удовлетворяют равенству

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m. \tag{3.32}$$

Действительно, согласно равенству (3.31), $C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m+1}\right) = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!}$.

Формула Лейбница*. Теорема 3.4. Если f и g принадлежат классу $C^{(n)}_{[X]}$, то $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ и

$$(fg)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m f^{(n-m)} g^{(m)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots + fg^{(n)}. \tag{3.33}$$

Формула (3.33) называется *формулой Лейбница.*

Доказательство. Поскольку $(f+g)' = f' + g'$; $(f+g)'' = f'' + g''$, ясно, что $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

Докажем теперь формулу (3.33) методом индукции.

Пусть $n = 1$. В этом случае $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, т. е. формула (3.33) справедлива.

Пусть формула (3.33) выполнена при $k = n$. Тогда для $k = n+1$ имеем $(f\cdot g)^{(n+1)} = [(f\cdot g)^{(n)}]' = \left[\sum_{m=0}^{n} C_n^m f^{(n-m)} g^{(m)}\right]' = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left[f^{(n-m)} \times g^{(m)}\right]' = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(f^{(n-m+1)}g^{(m)} + f^{(n-m)}g^{(m+1)}\right) = f^{(n+1)}g + \sum_{m=1}^{n} C_n^m \times f^{(n-m+1)}g^{(m)} + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m f^{(n-m)}g^{(m+1)} + fg^{(n+1)}$.

* Г. Лейбниц (1646—1716) — немецкий математик.

Изменим теперь во второй сумме индекс суммирования m, положив $m = m' - 1$, тогда новый индекс суммирования m' будет меняться от 1 до n, т. е.

$$\sum_{m=0}^{n-1} C_n^m f^{(n-m)} g^{(m+1)} = \sum_{m'=1}^{n} C_n^{m'-1} f^{(n-m'+1)} g^{(m')} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} f^{(n-m+1)} g^{(m)},$$

поскольку для суммирования безразлично, какой буквой обозначить индекс суммирования.

В результате с учетом соотношения (3.32) получаем

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{m=1}^{n} \left(C_n^m + C_n^{m-1}\right) f^{(n-m+1)} g^{(m)} + f \cdot g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(n+1-m)} g^{(m)}. \blacksquare$$

Пример 5. Найти f''' для функции $f(x) = x^4 \ln x$.

Решение. По формуле Лейбница имеем $(x^4 \ln x)''' = (x^4)''' \ln x + C_3^1 (x^4)'' \times$ $\times (\ln x)' + C_3^2 (x^4)' (\ln x)'' + x^4 (\ln x)''' = 24x \ln x + 36x - 12x + 2x = 24x \ln x + 26x$.

Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $f: X \to Y$ дифференцируема и $df = f'(x)\,dx$ — ее дифференциал. Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка, который обозначается d^2f, т. е. $d^2f = d(df)$. Дифференциал третьего порядка есть дифференциал от дифференциала второго порядка, т. е. $d^3f = d(d^2f)$, и т. д. Дифференциал n-го порядка есть $d^nf = d(d^{n-1}f)$.

Если x — независимая переменная и функция f имеет n производных, то, учитывая, что $(dx)' = (dx)'' = \ldots = (dx)^{(n)} = 0$, последовательно находим:

$$\begin{aligned} df &= f'(x)\,dx; \\ d^2f &= d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)\,dx^2; \\ d^3f &= d(f''(x)\,dx^2) = (f''(x)\,dx^2)'\,dx = f'''(x)\,dx^3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^nf &= d(f^{(n-1)}dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)\,dx^n. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Итак, если x — независимая переменная, а $f \in C^{(n)}_{[X]}$, то дифференциал n-го порядка вычисляется по формуле (3.34).

Предположим теперь, что x есть некоторая функция параметра t, т. е. $x = \varphi(t)$, $t \in T$. Тогда f является сложной функцией $f[\varphi(t)]$, и ее первый дифференциал, как известно, обладает свойством инвариантности формы.

Дифференциалы более высокого порядка инвариантностью не обладают. В самом деле, если x — независимая переменная, то, согласно формулам (3.34), $d^2f = f''_{xx}dx^2$. Если же $f = f(x)$, $x = \varphi(t)$, то $d^2f = d(df) = d(f'_x dx) = df'_x \cdot dx + f'_x d(dx) = f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x$, что не

совпадает с полученной выше формулой для d^2f в случае независимой переменной.

Задачи и упражнения.

1. Найти производную n-го порядка для функции:

а) $y=\dfrac{4x+3}{2x+3}$; б) $y=\lg(5x+2)$; в) $y=\sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

2. Найти y_{xx} функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}; \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t}; \\ y=\dfrac{\sin t}{1+2\cos t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=\operatorname{ch} t; \\ y=\sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

3. Записать выражение для третьего дифференциала функции $f=f(x)$, $x=\varphi(t)$.

4. Найти $f^{(20)}$, если $f(x)=x^2e^{2x}$.

5. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$ бесконечно дифференцируема при $x_0=0$.

3.4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Локальный экстремум функции. Говорят, что в точке x_0 функция f имеет *локальный максимум (минимум)*, если существует такое $\delta>0$, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0)),\quad \forall x\in U_\delta(x_0). \tag{3.35}$$

Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в них — *локальными экстремумами* функции.

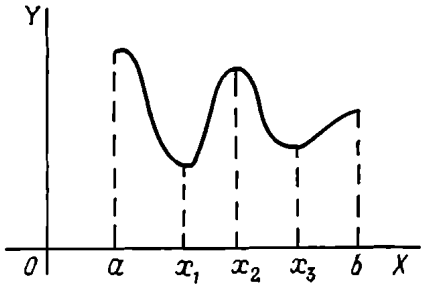


Рис. 3.5

Если функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет локальный экстремум на каком-то из концов этого отрезка, то такой экстремум будем называть *локальным односторонним экстремумом*. В этом случае соответствующая δ-окрестность является правой для a и левой для b полуокрестностью.

На рис. 3.5 x_1 и x_3 — точки локального минимума, x_2 — локального максимума, а a и b — точки одностороннего локального максимума.

Теорема Ферма*. Теорема 3.5. Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $x_0\in(a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда, если в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть для определенности в точке x_0 функ-

* П. Ферма (1601—1665) — французский математик.

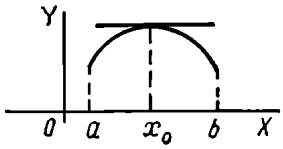


Рис. 3.6

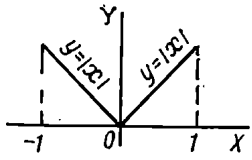


Рис. 3.7

ция имеет локальный максимум, т. е. $f(x) \leqslant f(x_0)$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$. Тогда в силу дифференцируемости f в точке x_0 при $x > x_0$ получим

$$\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0\right) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leqslant 0,$$

а при $x < x_0$ будем иметь

$$\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0\right) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geqslant 0.$$

Эти неравенства имеют место одновременно лишь при $f'(x_0)=0$. ■

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в следующем: если точка $x_0 \in (a, b)$ является точкой максимума или минимума функции и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси X (рис. 3.6).

Замечание. Оба условия — интервал (a, b) и дифференцируемость функции в точке локального экстремума — обязательны для справедливости теоремы Ферма. Действительно, пусть $f(x) = |x|$, $x \in (-1, 1)$. В точке $x_0 = 0$ функция f имеет локальный минимум, но в ней она не дифференцируема (рис. 3.7). В данном случае условие существования производной в точке локального минимума нарушено. и поэтому теорема Ферма не имеет места.

Пусть теперь $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$. В точке $x_0 = 1$ имеется локальный односторонний максимум, но $f'(1) = 3 \neq 0$. Теорема Ферма неприменима в данном случае, поскольку $x = 1 \in (-1, 1)$ (рис. 3.8).

Теорема Ролля*. Теорема 3.6. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка c, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

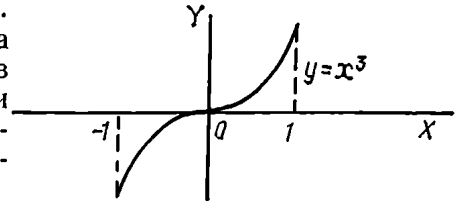


Рис. 3.8

Доказательство. Если f — постоянная на $[a, b]$, то $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Пусть теперь f не является постоянной функцией. Непрерывная на $[a, b]$ функция по теореме Вейерштрасса достигает в некоторых точках отрезка $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений. Поскольку f не является постоянной, то или $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ или $\min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ обязательно достигаются функцией во внутренней точке c отрезка $[a, b]$. Тогда, по теореме Ферма, $f'(c) = 0$. ■

* М. Ролль (1652—1719) — французский математик.

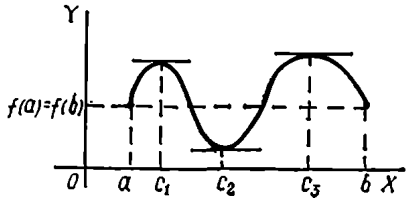


Рис. 3.9

Геометрический смысл теоремы Ролля следующий: при выполнении условий теоремы внутри отрезка $[a, b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка c, такая, что касательная к графику f в точке $(c, f(c))$ параллельна оси X (рис. 3.9).

Заметим, что все условия теоремы Ролля существенны. Приведем примеры.

Пример 1. Пусть $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Хотя $f(-1) = f(1) = 1$, но ни в одной точке отрезка $[-1, 1]$ производная функции f в нуль не обращается, так как в точке $x = 0$ нарушено условие дифференцируемости функции в интервале $(-1, 1)$.

Пример 2. Функция $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ не удовлетворяет теореме Ролля, поскольку она не является непрерывной на $[0, 1]$.

Пример 3. Функция $y = x$, $x \in [a, b]$, также не удовлетворяет теореме Ролля, так как $f(a) \neq f(b)$, $a \neq b$.

Теоремы Коши и Лагранжа. Теорема 3.7 (Коши). Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы во всех точках интервала (a, b), причем $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Тогда на (a, b) найдется точка c, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.36}$$

Доказательство. Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля на (a, b) нашлась бы точка ξ, такая, что $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), причем, как легко убедиться, $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля существует точка c из (a, b), такая, что $F'(c) = 0$. Но

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Отсюда и следует равенство (3.36). ■

Следствие (теорема о среднем Лагранжа*). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то на (a, b) найдется точка c, такая, что

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\right) \Leftrightarrow (f(b) - f(a) = f'(c)(b - c)). \tag{3.37}$$

* Ж. Л. Лагранж (1736—1813) — французский математик.

Формула (3.37) получается из равенства (3.36), если в ней положить $g(x) = x$.

Равенство (3.37) называется *формулой конечных приращений* или *формулой Лагранжа*. Ее часто записывают в виде

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))\ (b-a),\ 0 < \theta < 1,$$

где θ — некоторое число, при котором $a + \theta(b-a) = c$. Если положить $a = x_0$, $x - x_0 = \Delta x$, то формулу Лагранжа можно переписать следующим образом:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x,\ 0 < \theta < 1. \qquad (3.38)$$

Заметим, что отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ есть тангенс угла, образованного прямой, проходящей через точки $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$ графика функции f, с осью X. Геометрически теорема Лагранжа утверждает, что на интервале (a, b) существует точка c, такая, что касательная к графику функции f в точке $(c, f(c))$ параллельна секущей, проходящей через точки A и B (рис. 3.10).

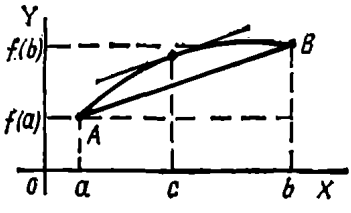


Рис. 3.10

Пример 4. Для функции $f(x) = \sqrt{5}\,x^3 + x^2$, $x \in [-1, 1]$, найти все точки c, такие, что имеет место формула Лагранжа.

Решение. Согласно формуле (3.37), имеем $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$. Но $f'(c) = 3\sqrt{5}\,c^2 + 2c$; $f(1) = \sqrt{5} + 1$; $f(-1) = 1 - \sqrt{5}$. Тогда $(3\sqrt{5}\,c^2 + 2c = \sqrt{5}) \Rightarrow c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 5. Доказать, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ имеет в точности два различных действительных корня.

Решение. Функция $f(x) = x^4 - 4x - 1$ непрерывна на $\mathbb{R}$, ее производная $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$ обращается в нуль лишь в точке $x = 1$. Если бы функция f обращалась в нуль, например, в трех точках, то ее производная, согласно теореме Ролля, обращалась бы в нуль в двух точках, что невозможно. Кроме того, $f(-1) = 4$; $f(0) = -1$ и $f(3) = 68$. Значит, искомые корни находятся на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 3]$.

Задачи и упражнения.

1. Удовлетворяет ли функция $f(x) = 3x^2 - 1$ условиям теоремы Ферма на интервале $(1, 2)$?

2. Удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля: а) функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$; б) функция $f(x) = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$? Если нет, то почему?

3. Применить формулу Лагранжа к функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1, e]$ и найти соответствующее значение c.

4. Удовлетворяют ли функции $f(x) = e^x$ и $g(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ условиям теоремы Коши на отрезке $[-3, 3]$?

5. Доказать, что между двумя корнями дифференцируемой функции существует по крайней мере один корень ее производной.

6. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место формула Лагранжа на отрезке $[a, b]$, т. е. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$, $c \in (a, b)$. Разделив одно равенство на другое, получим $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Можно ли этот прием считать доказательством теоремы Коши?

3.5. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ *

Правило Лопиталя. Во многих случаях отыскание предела функции в точке или на бесконечности приводит к рассмотрению неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞, раскрытие которых часто можно осуществить, используя правило Лопиталя. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.8. Пусть f и g — непрерывные функции, имеющие производные в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Предположим, что $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0. \tag{3.39}$$

Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.40}$$

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке x_0, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда они будут непрерывны в точке x_0. Применим к ним теорему Коши на отрезке $[x_0, x]$ (все условия теоремы Коши выполнены) и получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где точка c удовлетворяет условию $x_0 < c < x$. Если $x \to x_0$, то и $c \to x_0$, поэтому в силу условия теоремы $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ■

Итак, теорема 3.8 формулирует правило раскрытия неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$.

Замечание 1. Для применения правила Лопиталя существование предела в правой части равенства (3.40) существенно. Например, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = 0$. Однако формальное применение правила Лопиталя дает

* Г. Ф. Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

Последний же предел не существует.

Замечание 2. Если в свою очередь выражение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ есть неопределенность типа $\frac{0}{0}$ и функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.8, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Теорема 3.9. Пусть f и g — непрерывные функции, имеющие производные в окрестности точки x_0 и

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty. \tag{3.41}$$

Пусть $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.42}$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Таким образом, теорема 3.9 дает правило раскрытия неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Приведем ряд примеров применения правила Лопиталя.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

В этом примере дважды применена теорема 3.8.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}$, $a>1$.

Решение. Применяя правило Лопиталя n раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^n a}{n!}=+\infty.$$

Отсюда вытекает, что функция $f(x)=a^x$, $a>1$, при $x\to+\infty$ есть бесконечно большая функция более высокого порядка, чем степенная функция $g(x)=x^n$ для любого конечного числа n.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\log_a x}$, $\alpha>0$, $a>0$, $a\neq 1$.

Решение. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\log_a x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x\cdot\log_a e}=\frac{\alpha}{\log_a e}\lim_{x\to+\infty}x^\alpha=\infty.$$

Таким образом, степенная функция $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$, при $x \to +\infty$ есть бесконечно большая функция более высокого порядка, чем логарифмическая функция $g(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Правило Лопиталя дает возможность раскрывать неопределенности типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0°, ∞°, 1^{∞}, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Действительно, неопределенности типа 0°, ∞° или 1^{∞} можно свести к неопределенности $0 \cdot \infty$, предварительно прологарифмировав соответствующее выражение или воспользовавшись равенством $f^g = e^{g \ln f}$ $(f > 0)$. Неопределенность же типа $0 \cdot \infty$ $(f \to 0,\ g \to \infty)$ сводится к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ следующим образом: $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ или $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$. Для неопределенности $\infty - \infty$ $(f \to \infty,\ g \to \infty)$ получаем $f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}$, т. е. неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 1+0} \ln x \cdot \ln (x-1)$.

Решение. В данном случае имеется неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Поэтому

$$\lim_{x \to 1+0} \ln x \cdot \ln (x-1) = \lim_{x \to 1+0} \frac{\ln (x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 1+0} \frac{(\ln (x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to 1+0} \left(-x \frac{\ln^2 x}{x-1}\right) = -\lim_{x \to 1+0} \frac{\ln^2 x}{x-1} = -\lim_{x \to 1+0} \frac{2 \ln x}{x} = 0.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. При $x \to 0$ это выражение есть неопределенность типа 1^{∞}. Преобразуем его следующим образом:

$$(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 2x}.$$

Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \operatorname{tg} 2x}{2x} = -2.$$

В таком случае $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 1+0} (x-1)^{\ln x}$.

Решение. В данном случае неопределенность типа 0°. Последовательно имеем

$$\lim_{x \to 1+0} (x-1)^{\ln x} = \lim_{x \to 1+0} e^{\ln x \cdot \ln (x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 1+0} \ln x \cdot \ln (x-1)} = e^0 = 1,$$

согласно примеру 4.

Задачи и упражнения

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-1}{\ln x}$;

г) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

3.6. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА *

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**. Одной из основных задач математического анализа является задача приближения функции в окрестности данной точки. Наиболее простыми функциями являются многочлены. Возникает вопрос о возможности аппроксимации (приближения) данной функции в окрестности точки x_0 многочленом некоторой степени. Для дифференцируемых функций эта проблема решается с помощью формулы Тейлора.

Известно, что приращение дифференцируемой функции f в точке x_0 можно представить в виде $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$, т. е. существует многочлен первой степени $P_1(x)=f(x_0)+A(x-x_0)$, такой, что при $x\to x_0$ $f(x)=P_1(x)+o(x-x_0)$, причем многочлен $P_1(x)$ удовлетворяет условиям $P_1(x_0)=f(x_0)$; $P_1'(x_0)=A=f'(x_0)$.

Поставим более общую задачу. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке n производных $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$. Попытаемся найти многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n), \tag{3.43}$$

где $P_n(x)$ удовлетворяет условиям

$$f(x_0)=P_n(x_0),\ f'(x_0)=P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \tag{3.44}$$

Будем искать многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n. \tag{3.45}$$

Отсюда, дифференцируя, последовательно находим:

$P_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+3A_3(x-x_0)^2+\ldots+nA_n(x-x_0)^{n-1}$;
$P_n''(x)=2\cdot 1A_2+3\cdot 2(x-x_0)+4\cdot 3(x-x_0)^2+\ldots+n(n-1)A_n\times$
$\times(x-x_0)^{n-2}$;
. . . . . .
$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1A_n$.

---

* Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.
** Дж. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

Используя теперь условия (3.44), получаем:

$$f(x_0) = P_n(x_0) = A_0 \Rightarrow A_0 = f(x_0);$$
$$f'(x_0) = P_n'(x_0) = A_1 \Rightarrow A_1 = f'(x_0);$$
$$f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2 \cdot 1 A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n! A_n \Rightarrow A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

тем самым значения коэффициентов A_0, A_1, A_2, ..., A_n многочлена $P_n(x)$ определены. Подставляя их в равенство (3.45), получаем многочлен вида

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times \times (x - x_0)^n, \tag{3.46}$$

который называется *многочленом Тейлора* функции f.

Покажем, что многочлен $P_n(x)$ удовлетворяет условию (3.43). Обозначим

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{3.47}$$

Функция $R_n(x)$ есть погрешность при замене функции f многочленом $P_n(x)$ в окрестности точки x_0.

По самому определению многочлена $P_n(x)$ из условий (3.44) следует, что

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{3.48}$$

Убедимся, что $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$, т. е. что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Для этого применим n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$. Это нам даст

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

т. е. в самом деле $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$.

Таким образом, доказана следующая важная теорема.

Теорема 3.10. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и n раз дифференцируема в ней. Тогда при $x \to x_0$ имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times \times (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \tag{3.49}$$

или

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Формула (3.49) называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано*, где $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$ — *остаточный член*.

Так как разность $x - x_0 = \Delta x$, то $x = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, и формуле Тейлора (3.49) можно придать вид

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \frac{f''(x^0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o(\Delta x^n), \quad \Delta x \to 0. \tag{3.50}$$

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется *формулой Маклорена**, т. е., согласно формуле (3.49), формула Маклорена имеет вид

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + o(x^n), \; x \to 0. \tag{3.51}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Для остаточного члена формулы Тейлора существуют и другие представления. Получим представление его в *форме Лагранжа*.

Потребуем, чтобы функция f имела $n+1$-ю производную в окрестности точки x_0. Введем новую функцию $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Очевидно, что $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$, $g^{(n+1)}(x) = (n+1)! \neq 0$.

К функциям $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ применим теорему Коши. Тогда в силу условий (3.48) получим

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n'(c_1) - R_n'(x_0)}{g'(c_1) - g'(x_0)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)} = \ldots =$$
$$= \frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{R_n^{(n)}(c_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

где $c_1 \in (x_0, c_0)$, $c_2 \in (x_0, c_1)$, ..., $c_n \in (x_0, c_{n-1})$, $\xi \in (x_0, c_n) \subset (x_0, x)$. Но $g^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$, $R_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 = f^{(n+1)}(\xi)$.

Следовательно,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \; x_0 < \xi < x. \tag{3.52}$$

Формула (3.52) является *остаточным членом в форме Лагранжа*. Для точки ξ можно пользоваться представлением $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \times$$
$$\times (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{3.53}$$

Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Найдем разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$

---

* К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик.

по формуле Тейлора при $x_0 = 0$, т. е. по формуле Маклорена. Эти разложения называются *основными*.

1. $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbf{N}$, то $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Отсюда в силу равенства (3.53)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{3.54}$$

где $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \xi < x$ $(\xi = 0 + \theta x = \theta x)$.

2. $f(x) = \sin x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \ k = 0, 1, 2, \ldots; \\ (-1)^k, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Таким образом, согласно формуле (3.53),

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+3}(x), \tag{3.55}$$

где $|R_{2k+3}(x)| = \left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cos\xi\right| \leqslant \frac{|x^{2k+3}|}{(2k+3)!}$.

3. $f(x) = \cos x$. Для нее (см. § 3.3)

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} =$$
$$= \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k, \ k = 0, 1, 2, \ldots; \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases}$$

В таком случае

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+2}(x), \tag{3.56}$$

где $|R_{2k+2}(x)| = \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\xi\right| \leqslant \frac{|x^{2k+2}|}{(2k+2)!}$.

Покажем, что остаточный член формулы Тейлора для функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Действительно, так как при $a > 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ (см. пример 5 § 2.2), то отсюда для остаточного члена формулы Тейлора функции e^x получаем следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} = 0.$$

Точно так же получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для функций $\sin x$ и $\cos x$.

4. $f(x) = \ln(1+x)$. Для этой функции

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{(-1)^2 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n = 1, 2 \ldots .$$

Отсюда

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Тогда

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x), \quad (3.57)$$

где $|R_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n n!\,x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}\right|\leqslant\frac{|x^{n+1}|}{n+1}$, так как $\xi>0$.

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

откуда

$$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1).$$

Следовательно, формула Тейлора имеет вид

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ \ldots\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+R_n(x), \quad (3.58)$$

где $R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$.

Запишем *основные разложения* с остаточными членами в форме Пеано:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \ldots\ +\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ \ldots\ +(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ \ldots\ +(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ \ldots\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{k!}x^n+$$
$$+o(x^n).$$

Основные разложения применяются для представления по формуле Тейлора многих функций.

Пример 1. Функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

Решение. Указанное разложение можно найти, вычислив $f(1), f'(1), \ldots, f^{(n)}(1)$ и воспользовавшись формулой (3.53).

Другой путь решения состоит в следующем. Осуществим замену $x-1=t$. Тогда $f(x)=\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{3}}=F(t)$. Отсюда разложение функции

$\sqrt[3]{x}$ по степеням $(x-1)$ равносильно разложению функции $F(t)$ по степеням t по формуле (3.58), где $x=t$. Поэтому

$$(1+t)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}t+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)t^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}-2\right)t^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)t^n+$$
$$+R_n(t).$$

Подставив сюда значение $t=x-1$, получим окончательно

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{2!9}(x-1)^2+\frac{10}{3!27}(x-1)^3-\frac{80}{4!81}(x-1)^4+\ldots+$$
$$+R_n(x).$$

Приложения формулы Тейлора. Формула Тейлора дает общий метод выделения главной части функции f в окрестности рассматриваемой точки x_0. Из формулы (3.49) следует, что главной частью функции f при этом служит ее многочлен Тейлора.

Формула Тейлора широко применяется в приближенных вычислениях, при нахождении пределов функций в точке и т. д. Приведем примеры.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Из равенства (3.54) при $x=\frac{1}{2}$ имеем

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\frac{1}{2^3 3!}+\ldots+\frac{1}{2^n n!}+R_n,\quad R_n=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}(n+1)}.$$

Так так $0<\theta<1$, $2<e<3$, то $R_n<\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}$. Поскольку $e^{\frac{1}{2}}<2$, то $R_n<\frac{1}{2^n(n+1)!}$. Надо подобрать n так, чтобы выполнялось неравенство $R_n<0{,}0001$, т. е. $\frac{1}{2^n(n+1)!}<0{,}0001$. При $n=5$ имеем $R_5<\frac{1}{32\cdot 720}<0{,}0001$. Таким образом,

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{1}{2^5\cdot 5!}=1{,}6487.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}^4 x\sim x^4$, $x\to 0$, то, сохраняя в числителе члены до четвертого порядка относительно x, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{1/2}\cos x}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]}{x^4}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

Задачи и упражнения.

1. Многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$.

2. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в окрестности точки $x_0 = 2$.

3. Вычислить приближенно с точностью до 10^{-4}:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sin 1^0$; в) $\lg 11$.

4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{\sin^3 x}$.

5. Доказать формулу $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$, $n \geqslant 2$, $a > 0$, $x > 0$.

6. Пусть $f(x) = 1 + kx + o(x)$, $x \to 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^k$.

3.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

Условия монотонности функции. Напомним, что функция f называется *неубывающей (невозрастающей)* на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих (a, b), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$). При этом функция f *возрастает (убывает)* на (a, b), если $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) при $x_1 < x_2$. Возрастающие или убывающие на интервале (a, b) функции называются *монотонными* на этом интервале.

Теорема 3.11. Для того чтобы дифференцируемая на (a, b) функция f не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для всех $x \in (a, b)$. Если же $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция f возрастает (убывает) на этом интервале.

Доказательство. *Необходимость.* Если f не убывает (не возрастает) на (a, b), то для всех $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right).$$

Отсюда в пределе при $\Delta x \to 0$ получаем $f'(x_0) \geqslant 0$ ($f'(x_0) \leqslant 0$).

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ (случай $f'(x) \leqslant 0$ рассматривается аналогично). Тогда при $x_1 < x_2$ по формуле Лагранжа имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0$, так как $f'(\xi) \geqslant 0$ $(x_1 < \xi < x_2)$. Отсюда $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. функция f не убывает.

Если же $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b), то $f'(\xi) > 0\ (< 0)$, и поэтому $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$), т. е. функция f возрастает (убывает) ■

Замечание. Условие $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) не является необходимым условием возрастания (убывания) функции f на интервале (a, b). Примером тому может служить возрастающая на $(-1, 1)$ функция $f(x) = x^3$, однако производная этой функции в точке $x = 0$ обращается в нуль.

Необходимые и достаточные условия экстремума функции. Определение локального максимума и минимума дано в § 3.4. Ему можно дать несколько иную формулировку.

Говорят, что функция f имеет в точке x_0 *локальный максимум (локальный минимум)*, если существует δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, такая, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполнено неравенство

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \quad (\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geqslant 0). \qquad (3.59)$$

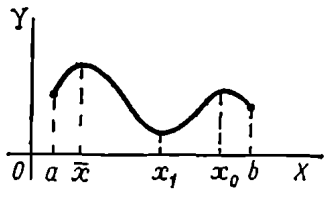


Рис. 3.11

Мы говорим *локальный экстремум*, потому что вне окрестности $U_\delta(x_0)$ функция f может иметь другой локальный экстремум (рис. 3.11).

Согласно теореме Ферма, из дифференцируемости функции f в точке x_0 локального экстремума следует соотношение $f'(x_0) = 0$. Точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, называются *стационарными*.

Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием экстремума дифференцируемой функции f в точке x_0. Например, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $x_0 = 0$ ($f'(0) = 0$), тем не менее в ней функция экстремума не имеет.

Подозрительными на экстремум могут быть и точки, в которых производная функции не существует или бесконечна, как это следует из рис. 3.2 и 3.3, *в*, *г*.

Таким образом, точками возможного экстремума функции f на интервале (a, b) являются точки, в которых производная f существует и равна нулю, и точки, где она не существует или бесконечна.

Теорема 3.12 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть точка x_0 является точкой возможного экстремума функции f и пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, в которой она является непрерывной. Тогда если

$$f'(x) \geqslant 0 \ (f'(x) \leqslant 0) \ \text{при} \ x < x_0; \ f'(x) \leqslant 0 \ (f'(x) \geqslant 0) \ \text{при} \ x > x_0, \qquad (3.60)$$

то точка x_0 является точкой локального максимума (минимума) функции f.

Доказательство. Из неравенств (3.60) и теоремы 3.11 следует, что $f(x)$ при $x < x_0$ не убывает (не возрастает), а при $x > x_0$ не возрастает (не убывает) (рис. 3.12, 3.13), т. е. при $x < x_0$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$), а при $x > x_0$ — неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$). Отсюда на основании неравенства (3.59) и следует утверждение теоремы. ■

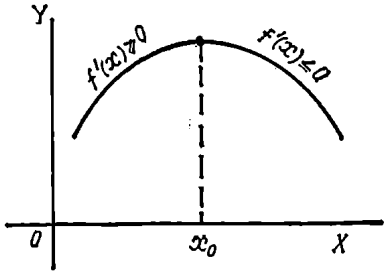


Рис. 3.12

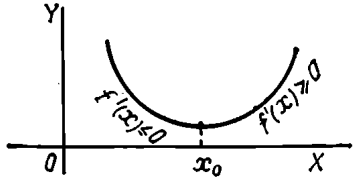


Рис. 3.13

Замечание. Условия (3.60) не требуют существования производной $f'(x_0)$, но требуют непрерывности функции f в точке x_0.

Теорема 3.13 (второе достаточное условие экстремума). Если x_0— стационарная точка, в которой $f''(x_0) > 0$ (<0), то в точке x_0 функция f имеет локальный минимум (максимум).

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$ (случай $f''(x_0) < 0$ рассматривается аналогично), т. е.

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 и $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, т. е. $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. По теореме 3.12 заключаем, что в точке x_0 достигается локальный минимум. ■

Итак, достаточным условием локального максимума дифференцируемой функции в точке x_0 является

$$f'(x_0) = 0;\ f''(x_0) < 0, \tag{3.61}$$

а локального минимума —

$$f'(x_0) = 0;\ f''(x_0) > 0. \tag{3.62}$$

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = x^2(x-2)^2$ на экстремум.

Решение. Имеем $f'(x) = 4x(x-1)(x-2)$, $f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2)$. Стационарными точками функции являются точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$. В них $f''(0) = 8 > 0$; $f''(1) = -4 < 0$ и $f''(2) = 8 > 0$. Согласно условиям (3.61) и (3.62), рассматриваемая функция имеет локальный максимум при $x = 1$ и локальные минимумы при $x = 0$ и $x = 2$ (рис. 3.14).

Используя производные высших порядков, сформулируем и докажем еще одно достаточное условие экстремума.

Теорема 3.14. Если в точке x_0 функция f обладает свойством

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ \ldots\ = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0, \tag{3.63}$$

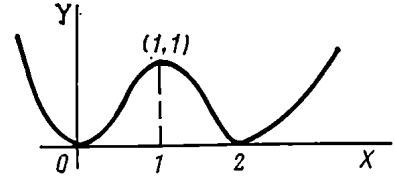


Рис. 3.14

причем $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0, то при n четном функция f в точке x_0 имеет экстремум: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n — нечетное, то в точке x_0 экстремума нет.

Доказательство. Разложим функцию f в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора. Учитывая условие (3.63), получаем

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{3.64}$$

В силу непрерывности $f^{(n)}$ в точке x_0 в достаточно малой окрестности $U_\delta(x_0)$ производная $f^{(n)}(x)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(x_0)$.

Рассмотрим возможные случаи.

1 $\left.\begin{array}{l} n \text{ — четное;} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x - x_0)^n > 0; \\ f^{(n)}(\xi) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0), \ \forall x \in U_\delta(x_0),$

т. е. при n четном и $f^{(n)}(x_0) > 0$ в точке x_0 функция f имеет локальный минимум.

2. $\left.\begin{array}{l} n \text{ — четное;} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x - x_0)^n > 0; \\ f^{(n)}(\xi) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0), \ \forall x \in U_\delta(x_0),$

т. е. если n — четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция f имеет локальный максимум.

Если же $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ и n — нечетное, то из формулы (3.64) следует, что функция f в точке x_0 экстремума не имеет (почему?). ■

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Имеем $f(0) = 1$. Далее $f'(0) = (6e^x - 3x^2 - 6x - 6)_{x=0} = 0$; $f''(0) = (6e^x - 6x - 6)_{x=0} = 0$; $f'''(0) = (6e^x - 6)_{x=0} = 0$; $f^{IV}(0) = 6 > 0$. Так как $n = 4$ — четное и $f^{IV}(0) = 6 > 0$, то рассматриваемая функция при $x_0 = 0$ имеет локальный минимум.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Наибольшее $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ и наименьшее $\min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ значения непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$ иногда называются *глобальным максимумом* и *минимумом* соответственно или короче *глобальным экстремумом*. Глобальный экстремум непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$ существует в силу теоремы Вейерштрасса. Очевидно, что точками глобального экстремума могут быть точки локального экстремума или концы отрезка. Отсюда получаем правило отыскания глобального экстремума функции на отрезке $[a, b]$:

1) находим точки возможного экстремума функции f на интервале $[a, b]$;

2) вычисляем значения функции f в этих точках и значения $f(a)$ и $f(b)$

Наибольшее из этих значений есть $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, а наименьшее — $\min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$

Пример 3. Найти глобальный экстремум функции $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Решение. Находим точки возможного экстремума функции. Имеем $f'(x) = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x}}$. Отсюда точками возможного экстремума являются $x_1 = \frac{2}{3}$ и $x_2 = 0$. Обе они принадлежат интервалу $(-1, 1)$. Находим $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{12}}{6}$; $f(0) = 0$; $f(a) = f(-1) = -2$; $f(b) = f(1) = 0$.

Таким образом, наибольшее значение искомой функции на отрезке $[-1, 1]$ равно нулю, оно достигается в точках $x = 0$ и $x = 1$. Наименьшее же значение функции на этом отрезке равно -2, оно достигается функцией в точке $x = -1$.

Выпуклость и точки перегиба. Говорят, что *дифференцируемая функция f обращена в точке x_0 выпуклостью вверх (вниз)*, если существует окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ этой точки, такая, что для всех $x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus x_0$ касательная к графику f в точке $(x_0, f(x_0))$ расположена выше (ниже) графика функции (рис. 3.15 и 3.16 соответственно).

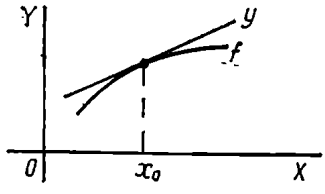


Рис. 3.15

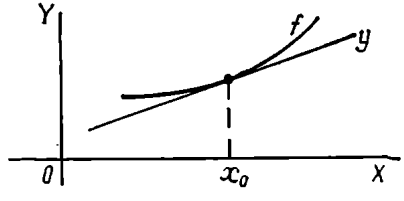


Рис. 3.16

Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если существует такая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ график функции находится с одной стороны касательной в x_0, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ — с другой (рис. 3.17).

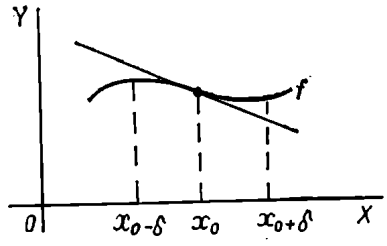


Рис. 3.17

Теорема 3.15 (достаточное условие выпуклости). Если f дважды непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то в точке x_0 функция f выпукла вниз (вверх).

Доказательство. Рассмотрим некоторую δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0. К графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ проведем касательную, уравнение которой имеет вид $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Функцию f разложим по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \quad \xi \in U_\delta(x_0). \qquad (3.65)$$

Рассмотрим разность $f(x) - Y = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2$, которая пред-

ставляет собой разность ординат кривой f и касательной в любой фиксированной точке $x \in U_\delta(x_0)$. В силу непрерывности f'', если $f''(x_0) > 0$, то и $f''(\xi) > 0$ в достаточно малой окрестности, а поэтому и $f(x) - Y > 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то и $f(x) - Y < 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$. Таким образом, получаем:

1) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > Y$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0$;
2) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < Y$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus x_0$,

а это и означает, что в первом случае функция в точке x_0 выпукла вниз, во втором — выпукла вверх. ■

Теорема 3.16 (необходимое условие точки перегиба). Если функция f имеет непрерывную в точке x_0 производную f'' и x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Если бы в точке перегиба выполнялось неравенство $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то по предыдущей теореме функция f в этой точке была бы выпукла вниз (вверх). ■

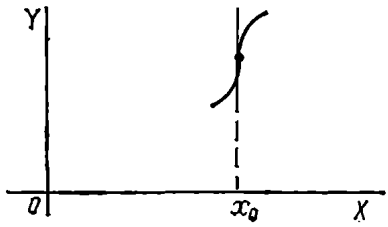


Рис. 3.18

Отсюда следует, что точками возможного перегиба функции f могут быть точки x_0, в которых $f''(x_0) = 0$, либо точки, в которых f'' не существует, в частности бесконечна (рис. 3.18).

Достаточные условия точек перегиба функции даются следующими теоремами.

Теорема 3.17 (первое достаточное условие перегиба). Если функция f дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, непрерывна в самой точке x_0 и

$$\begin{aligned} &f''(x) < 0 \ (f''(x) > 0) \text{ при } x < x_0; \\ &f''(x) > 0 \ (f''(x) < 0) \text{ при } x > x_0, \end{aligned} \tag{3.66}$$

то точка x_0 является точкой перегиба функции f.

Доказательство. Действительно, в этом случае по теореме 3.15 для $x < x_0$ функция f выпукла вверх (вниз), а для $x > x_0$ — выпукла вниз (вверх). Следовательно, x_0 — точка перегиба. ■

Соотношения (3.66) показывают, что если вторая производная f'' при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс (с плюса на минус), то график функции f, расположенный ниже (выше) касательной, пересекает ее, касаясь в точке $(x_0, f(x_0))$, и располагается выше (ниже) касательной (рис. 3.19, 3.20).

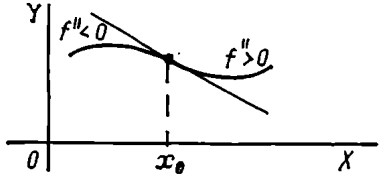


Рис. 3.19

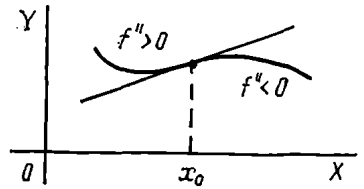


Рис. 3.20

Теорема 3.18 (второе достаточное условие перегиба). Если функция f имеет непрерывную третью производную f''' в точке x_0 и $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то функция f имеет в точке x_0 перегиб.

Доказательство. По теореме 3.11 в силу $f'''(x_0) \neq 0$ вытекает, что $f''(x)$ либо возрастает ($f'''(x_0) > 0$), либо убывает ($f'''(x_0) < 0$) в точке x_0. Так как $f''(x_0) = 0$, то в любом из этих случаев найдется такая окрестность точки x_0, в пределах которой $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от x_0. Тогда по теореме 3.17 в точке x_0 имеется перегиб функции f. ■

Докажем теперь более общее достаточное условие перегиба.

Теорема 3.19. Пусть в точке x_0 для функции f выполнены условия

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{3.67}$$

и существует непрерывная в точке x_0 производная $f^{(n)}$, $n \geqslant 2$, причем $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если n — нечетное число, то в точке x_0 функция f имеет перегиб.

Доказательство. Разлагая f по формуле Тейлора с учетом условий (3.67), получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{3.68}$$

где $\xi \in (x_0, x)$. Если $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, то из формулы (3.68) имеем

$$f(x) - Y = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{3.69}$$

где n — нечетное.

В силу непрерывности $f^{(n)}(x)$ в точке x_0 существует окрестность точки x_0, в которой эта производная сохраняет знак, совпадающий со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Поэтому можем считать, что знаки $f^{(n)}(x_0)$ и $f^{(n)}(\xi)$ совпадают. Тогда из равенства (3.69) получаем, что при переходе x через x_0 слева направо график функции располагается по разные стороны от касательной, т. е. в точке $(x_0, f(x_0))$ имеется перегиб. ■

Пример 4. Исследовать поведение функции $f(x) = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Последовательно находим $f'(2) = \left(2x - 4 - \ln(x-1) - \frac{x-2}{x-1}\right)_{x=2} = 0$; $f''(2) = \left(2 - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)_{x=2} = 0$; $f'''(2) = \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right)_{x=2} = 3 \neq 0$. Так как первой отличной от нуля производной в точке $x_0 = 2$ оказалась производная нечетного порядка, то по теореме 3.19 искомая функция в точке $x_0 = 2$ имеет перегиб.

Асимптоты графика функции. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции f, если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен ∞. Например, прямая $x = 2$

является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)=\frac{x}{x-2}$, так как $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)=\pm\infty$.

Прямая $Y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика непрерывной функции f при $x\to+\infty$ $(-\infty)$, если

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),\quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\alpha(x)=0. \tag{3.70}$$

Существование асимптоты графика функции означает, что при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ функция f отличается от линейной функции $Y=kx+b$ на б. м. ф. или что разность ординат функции f и касательной Y в точке x стремится к нулю при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ (рис. 3.21).

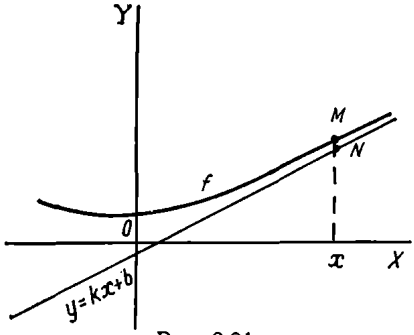


Рис. 3.21

Укажем теперь способ определения коэффициентов k и b наклонной асимптоты $Y=kx+b$.

Теорема 3.20. Для того чтобы прямая $Y=kx+b$ являлась наклонной асимптотой графика функции f при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, необходимо и достаточно существование конечных пределов

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k;\quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b. \tag{3.71}$$

Доказательство. Ограничимся случаем $x\to+\infty$. *Необходимость.* Если $Y=kx+b$ — асимптота графика функции f при $x\to+\infty$, то из условия (3.70) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы (3.71). Тогда из второго равенства по теореме 2.7 получаем $f(x)-kx=b+\alpha(x)$, $\alpha(x)\to 0$, $x\to+\infty$, откуда $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, т. е. прямая $Y=kx+b$ — наклонная асимптота графика функции f при $x\to+\infty$. ■

Пример 5. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{x-1}$.

Решение. При $x=1$ функция неограничена. Следовательно, вертикальной асимптотой будет прямая $x=1$. Далее из равенств (3.71) находим:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x+1}{x(x-1)}=-1;\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+2x+1}{x-1}+x\right)=1.$$

Следовательно, наклонная асимптота задана уравнением $y=-x+1$.

Общая схема построения графика функции. Из вышеизложенного рекомендуется следующая схема построения графика функции:

1) находим область определения функции;
2) исследуем функцию на периодичность, четность или нечетность;
3) исследуем функцию на монотонность и экстремум;
4) находим промежутки выпуклости и точки перегиба;
5) отыскиваем асимптоты графика функции;
6) для уточнения хода графика функции находим точки пересечения его с осями координат;
7) строим график функции.

Пример 6. Построить график функции $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

Решение. 1. Область определения $X = \mathbf{R}$.

2. Функция ни четная, ни нечетная, ни периодическая.

3. Находим $f'(x) = \dfrac{x+2}{3\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$, $(f'(x) = 0) \Rightarrow x_1 = -2$ — стационарная точка. Точки, в которых f' не существует, суть $x_2 = 0$ и $x_3 = -3$. Эти точки разбивают область определения X на промежутки $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$ и $(0, +\infty)$. Исследуем знак производной f в этих промежутках. Результаты исследования заносим в таблицу

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\max \sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\min 0$	$\nearrow$

В этой таблице стрелка $\nearrow$ указывает на возрастание функции, а стрелка $\searrow$ — на убывание. Из таблицы видно, что функция на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$ возрастает, а на интервале $(-2, 0)$ убывает. Локальный максимум функции в точке $x_1 = -2$, а локальный минимум — в точке $x_2 = 0$.

4. Находим $f''(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$. Точками возможного перегиба являются точки $x_4 = 0$ и $x_5 = -3$. Они разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ и $(0, +\infty)$. Исследуем знак f'' в этих промежутках. Результаты исследования заносим в таблицу

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	∞	$-$	∞	$-$
$f(x)$	Выпукла вниз	Перегиб	Выпукла вверх	Перегиба нет	Выпукла вверх

5. Вертикальных асимптот нет. Для наклонной асимптоты $Y = kx + b$ коэффициенты k и b находим по формулам (3.71): $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = 1$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x+3)x^2} - x = 1$, т. е. $Y = x + 1$ — наклонная асимптота.

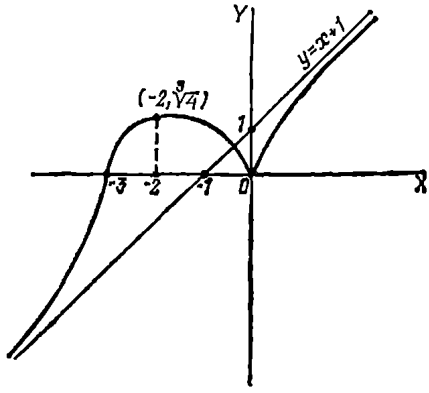


Рис. 3.22

6. Точки (—3, 0) и (0, 0) являются точками пересечения графика функции с осями координат.

7. По полученным данным строим график искомой функции (рис. 3.22).

Задачи и упражнения

1. Исходя из определения экстремума, доказать, что функция f в точке $x_0=$ имеет минимум, а функция g в этой точке имеет максимум, если

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0; \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

а) $y=x^4-\frac{4}{3}x^3$, $x\in[-1,\ 1]$; б) $y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $x\in[-3;\ 3]$.

3. Исследовать поведение функций в окрестности заданных точек с помощью производных высших порядков:

а) $y=1-2x-x^2-2\cos(x+1)$, $x_0=-1$;

б) $y=\sin^2(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$.

4. Провести полное исследование и построить графики следующих функций:

а) $y=(x+1)^2(x-1)^2$; б) $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$; в) $y=\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$.

ОТВЕТЫ

1.1

1. (0, 1]; [0, 2]; ∅; [1, 2].

1.2

1. $(-\infty, \infty)$; $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. **2.** $x = 2 - \sqrt{y+13}$, $[-10, -2]$, $[-2, -1]$.

1.3

1. -6. **2.** (8, −12,5). **3.** $\left(2, \frac{5}{9}, -\frac{28}{9}\right)$. **4.** $\frac{1}{3}(\mathbf{r}^1 + \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^3)$. **5.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$.

1.4

1. $\arccos \frac{9}{\sqrt{156}}$. **2.** 3. **3.** а) −7; б) 13. **4.** $\pm\frac{3}{5}$.

1.5

1. $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$. **2.** $\frac{10}{3}$, $\frac{14}{3}$. **3.** (1, 4, 7), (−3, 2, 1). **4.** (2 0, 4). **5.** $3x + 12y - 7z = 0$. **6.** 2, −10. **7.** $\pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **8.** $x = t$, $y = -t$, $z = \frac{3}{2}$. **10.** (3,3, −3). **11.** $\frac{5\sqrt{30}}{6}$. **12.** $\frac{x}{-10} = \frac{y - 3{,}4}{13} = \frac{z - 5{,}2}{19}$.

1.6

2. а) нет; б) да; в) нет. **7.** а) $(x_1, 0, x_3, 0, x_5)$; б) $(\alpha, \beta, \gamma, \beta, \alpha)$. **8.** (−31, −14, 26). **9.** 2. **10.** 0.

1.7

1. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$. **5.** $\frac{x_1 - 1}{0} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3 + 1}{2} = \frac{x_4 - 4}{-3} = \frac{x_5 + 2}{6}$. **6.** $x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 26$. **7.** $(\alpha, -\alpha, 0, 0)$. **9.** Нет.

1.9

2. а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; б) нет; в) нет; г) a. **3.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.10

1. а) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$; б) $\mathbf{a}^T$. **3.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$.

1.11

1. а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) нет; е) нет. **2.** а) $abcd$; б) $abcd$; в) 150; г) −1400; **5.** 0.

1.12

1. а) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{bmatrix}$; б) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -32 & 18 \end{bmatrix}$. 3. а) $(A-2B)^{-1}(C-B)$; б) $(A+2E)^{-1}(B+3C)$. 4. Поменяются местами соответствующие два столбца.

1.13

1. $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$. 2. $8\sqrt{5}/3$. 4. 63.

1.14

1. а) 2; б) 3; в) 3; г) 3. 2. а) нет; б) да; в) да; г) нет.

1.15

1. а) $\mathbf{x}^1=(-2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^T$, $\mathbf{x}^2=(-2,\ 0,\ -3,\ 1,\ 0)^T$, $\mathbf{x}^3=(-1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)^T$; б) $\mathbf{x}^1=(1,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0)^T$, $\mathbf{x}^2=(10,\ 0,\ -24,\ 3,\ 0)^T$, $\mathbf{x}^3=(-3,\ 0,\ 3,\ 0,\ 1)^T$. 2. а) $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+c\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^0=(-1,\ 2,\ 0)^T$, $\mathbf{x}^1=(1,\ -1,\ 1)^T$; б) не совместна. 3. а) $(1,\ 2,\ -1)^T$; б) $(1,\ 1,\ 1)^T$. 4. а) $(1,\ -2,\ 0)^T$; б) $\left(-\frac{26}{11},\ \frac{5}{11},\ -\frac{1}{11}\right)^T$.

1.16

3. $\mathbf{x}^1=(3,\ 5,\ -1)$, $\mathbf{x}^2=(4,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{x}^3=(2,\ 0,\ -1)$. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$.

1.17

1. $\mathbf{u}^1=2\mathbf{v}^1-\frac{3}{2}\mathbf{v}^2+\frac{1}{2}\mathbf{v}^3$, 2. $\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$. 3. $(1,\ 2,\ 3)$.

$\mathbf{u}^2=\frac{3}{2}\mathbf{v}^1-\mathbf{v}^2+\frac{1}{2}\mathbf{v}^3$,

$\mathbf{u}^3=\frac{3}{2}\mathbf{v}^1-\frac{3}{2}\mathbf{v}^2+\mathbf{v}^3$.

1.18

1. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=2$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -27 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=-3$.

2. а) $\mathbf{e}^1=(1,\ -2)t$, $\mathbf{e}^2=(1,\ 1)s$, $\forall t, s\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$; б) $\mathbf{e}^1=(1,\ 2,\ 2)t$, $\mathbf{e}^2=(2,\ 1,\ -2)s$, $\mathbf{e}^3=(2,\ -2,\ 1)k$, $\forall t, s, k\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$, $k\neq 0$.

1.19

1. а) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & -1/2 & 0 & 4 \\ -1/2 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5/2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 2. $-x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2^2+2x_2x_3+5x_3^2$. 3. б) $-y_1^2-7y_2^2+5y_3^2$, $x_1=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2=\frac{2}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2$, $x_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$;

в) $-7y_1^2+2y_2^2$, $x_1=\frac{2}{\sqrt{21}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{3}{\sqrt{14}}y_3$, $x_2=\frac{11}{\sqrt{21}}y_1+\frac{2}{\sqrt{6}}y_2-$
$-\frac{2}{\sqrt{14}}y_3$, $x_3=-\frac{4}{\sqrt{21}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{14}}y_3$.

1.20

4. $x^2+y^2+2xy-6x+2y+9=0$. 5. $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{24^2}=1$. 6. $\frac{2\sqrt{24}}{25}$. 7. а) эллипс; б) пара пересекающихся прямых; в) гипербола; г) парабола; д) $\frac{x'^2}{2k}-\frac{y'^2}{2k}=1$.

2.1

3. а) $\sup A=\frac{1}{2}$, $\inf A=0$; б) $\sup B=1$, $\inf B=-2$; в) $\sup C=2$, $\inf C=1$.

2.2

2. а) $\frac{2}{3}$; б) 0; в) $3\sqrt{3}$; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{7}{2}$. 6. $\frac{1}{e}$.

2.3

1. $\frac{e}{6}$. 2. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) 1. 3. $f(0+0)=0$, $f(0-0)=-1$.

2.4

5. $\frac{1}{2}$.

2.6

2. а) 2π; б) $-\pi$; в) $-\frac{2}{\pi}$; г) $\ln\frac{8}{9}$; д) $3\ln 3$; е) $\frac{2}{5}$; ж) e; з) $\frac{2}{3+\pi}$.

2.7

1. Да. 2. Нет. 3. Да. 4. $\frac{e}{10}$.

3.1

2. а) 0; б) не существует. 4. $x-4y+5=0$, $4x+y-10=0$. 5. а) $\cos\ln x$; б) $\frac{x^3-3}{\sqrt{4x-x^2}}$; в) $\left(\frac{\operatorname{ctg}x}{x^4+5}4x^3-\frac{\ln(x^4+5)}{\sin^2 x}\right)(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$.

3.2

2. а) 0,56; б) 1,01.

3.3

1. а) $\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$; б) $\frac{(-1)^{n-1}5^n(n-1)!}{(5x+2)^n}\lg e$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{2x+1}{3}}$. 2. а) $\frac{2}{\sqrt{(t-1)^3}}$; б) $-\frac{(1+2\cos t)^3}{\sin^3 t}$; в) $-\frac{2(\operatorname{ch}^2 t+3)}{9\operatorname{sh}\frac{10}{3}t}$. 4. $2^{20}(x^2+20x+95)e^{2x}$.

3.5

1. а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\ln a$; г) $\frac{2}{\pi}$; д) $-\frac{1}{2}$.

3.6

2. $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n$. **3.** а) 2,2361; б) 0,0174; в) 1,0414. **4.** а) $-\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{3}$.

3.7

2. а) $-1{,}1$; б) $-1{,}3$.

ЛИТЕРАТУРА

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, 1980.— 336 с.

Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Наука, 1980.— 176 с.

Воеводин В. В. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1980.— 400 с.

Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М.: Наука, 1975.— 408 с.

Ильин В. А., Позняк В. Г. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1974.— 296 с.

Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Высш. шк., 1972.— 424 с.

Дифференциальное исчисление

Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1980.— 432 с.

Ильин В. А., Позняк В. Г. Основы математического анализа.— М.: Наука, 1971, т. 1.— 600 с.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.— М.: Высш. шк., 1981, т. 1.— 688 с.

Ростислав Михайлович Жевняк
Андрей Андреевич Карпук

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Ч. I

Редактор *С. С. Голод*
Мл. редактор *Р. А. Масловская*
Обложка *В. А. Ягдарова*
Худож. редактор *Ю. С. Сергачев*
Техн. редактор *И. П. Тихонова*
Корректор *Л. А. Шлыкович*

ИБ № 1788

Сдано в набор 17.03.83. Подписано в печать 26.12.83. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14,25. Уч.-изд. л. 15,96. Тираж 8000 экз. Зак. 3441. Цена 70 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048. Минск, проспект Машерова, 11.

Отпечатано с набора Минского ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбината МППО им. Я. Коласа. 220005. Минск, ул. Красная, 23 в типографии им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника». 220600. Минск, Ленинский проспект, 68. Зак. 16.